ÁLGEBRA LINEAL

Práctica N°2: Matrices

Ejercicio 1. Probar que los siguientes conjuntos son subespacios de $K^{n\times n}$ y calcular su dimensión

i) $S_1 = \{A \in K^{n\times n} / A = A^t\}$ (matrices simétricas)

ii) $S_2 = \{A \in K^{n\times n} / A = -A^t\}$ (matrices antisimétricas)

iii) $S_3 = \{A \in K^{n\times n} / A_{ij} = 0 \text{ si } i > j\}$ (matrices triangulares superiores)

iv) $S_4 = \{A \in K^{n\times n} / A_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j\}$ (matrices diagonales)

v) $S_5 = \{A \in K^{n\times n} / A_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \text{ y } A_{11} = A_{22} = ... = A_{nn}\}$ (matrices escalares)

vi) $S_6 = \{A \in K^{n\times n} / tr(A) = 0\}$

Ejercicio 2. Sean S_1 , S_2 , S_5 y S_6 los subespacios del ejercicio anterior.

i) Probar que, si $2 \neq 0$ en K,
$$S_1 \oplus S_2 = K^{n\times n}$$

ii) Probar que, si $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$,
$$S_5 \oplus S_6 = K^{n\times n}$$

Ejercicio 3. Sean m , n y $r \in \mathbb{N}$. Probar que:

i) Si $A \in K^{m\times n}$, $B \in K^{n\times r}$ y $C \in K^{r\times s}$, entonces $(A.B).C = A.(B.C)$

ii) Si $A \in K^{m\times n}$, $B, C \in K^{n\times r}$, entonces $A.(B + C) = A.B + A.C$

iii) Si $I_r \in K^{r\times r}$ denota la matriz identidad y $A \in K^{m\times n}$, entonces $I_m.A = A.I_n = A$

iv) Si $A \in K^{m\times n}$ y $B \in K^{n\times r}$ con $B = (b_{ij})$, sea $B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ . \\ . \\ . \\ b_{nj} \end{pmatrix}$ para $1 \leq j \leq r$

(B_j es la columna j-ésima de B).

Entonces $A.B = (A.B_1|...|A.B_r)$ (es decir, $A.B_j$ es la columna j-ésima de $A.B$).

v) Sean A, $A' \in K^{n\times n}$; B, $B' \in K^{n\times m}$; C, $C' \in K^{m\times n}$ y D, $D' \in K^{m\times m}$.

Sea $M \in K^{(n+m)\times(n+m)}$ definida por $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ y sea $M' \in K^{(n+m)\times(n+m)}$ definida por $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$.

Entonces $$M.M' = \begin{pmatrix} A.A' + B.C' & A.B' + B.D' \\ C.A' + D.C' & C.B' + D.D' \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4.

i) Probar que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, el producto de matrices en $K^{n\times n}$ no es conmutativo.

ii) Caracterizar el conjunto $\{A \in K^{n\times n} / A.B = B.A \ \forall B \in K^{n\times n}\}$.

iii) Sea $A \in K^{n\times n}$. Probar que el conjunto S de todas las matrices que conmutan con A es un subespacio de $K^{n\times n}$. Probar que $I_n \in S$ y que $A^j \in S \ \forall j \in \mathbb{N}$.

iv) Sea $A \in K^{n\times n}$ con $n \geq 2$. Probar que el conjunto $\{I_n, A, A^2, A^3, ..., A^{n^2-1}\}$ es linealmente dependiente.

v) Dar condiciones necesarias y suficientes sobre A y $B \in K^{n\times n}$ para que

(a) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$

(b) $A^2 - B^2 = (A - B).(A + B)$

vi) Probar que si A y $B \in K^{n\times n}$ no necesariamente vale $A^2.B^2 = (A.B)^2$

Ejercicio 5. Sean A, B y $C \in K^{n\times n}$ $(n \geq 2)$. Mostrar la falsedad de las siguientes afirmaciones:

i) $A.B = 0 \Rightarrow A = 0$ ó $B = 0$

ii) $A.B = A.C$ y $\mathrm{A} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{B} = \mathrm{C}$

iii) $A.B = 0 \Rightarrow B.A = 0$

iv) $A^j = 0 \Rightarrow A = 0$

v) $A^2 = A \Rightarrow A = 0$ ó $A = I_n$

Ejercicio 6. Sea $A \in K^{n\times n}$. Probar que el conjunto $T = \{B \in K^{n\times n}/A.B = 0\}$ es un subespacio de $K^{n\times n}$. Si $S \subset K^n$ es el subespacio de soluciones del sistema homogéneo cuya matriz asociada es A, probar que $\dim T = n. \dim S$.

Ejercicio 7. Sean $A, A' \in K^{m\times n}$; $B \in K^{n\times r}$; $D, D' \in K^{n\times n}$; $\alpha \in K$. Probar:

i) $(A + A')^t = A^t + (A')^t$

ii) $(\alpha.A)^t = \alpha.A^t$

iii) $(A.B)^t = B^t.A^t$

iv) $tr(D + D') = tr(D) + tr(D')$

v) $tr(\alpha.D) = \alpha.tr(D)$

vi) $tr(D.D') = tr(D'.D)$

Ejercicio 8. Sean A y $B \in K^{n\times n}$.

i) Probar que si A y B son triangulares superiores, $A.B$ es triangular superior.

ii) Probar que si A y B son diagonales, $A.B$ es diagonal.

iii) Probar que si A es estrictamente triangular superior (es decir, $A_{ij} = 0$ si $i \geq j$), $A^n = 0$.

Ejercicio 9. Sea $A \in K^{n\times n}$.

i) Probar que $A.A^t$ y $A^t.A$ son simétricas. Encontrar un ejemplo donde $A.A^t \neq A^t.A$.

ii) El producto de dos matrices simétricas, ¿es una matriz simétrica?

iii) Si $K = \mathbb{R}$, probar que $A = 0 \iff A.A^t = 0 \iff tr(A.A^t) = 0$

Ejercicio 10. Sea $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

i) Hallar b y $c \in \mathbb{R}$ / $A^2 + b.A + c.I_2 = 0$

ii) Calcular A^n $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 11. Describir $GL(1, K)$.

Ejercicio 12. Sea $A \in K^{2\times 2}$ con $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $\Delta = a.d - b.c$. Si $\Delta \neq 0$, probar que $A \in GL(2, K)$ y $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}.\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Ejercicio 13. Sea $A \in GL(n, K)$ y $B\,,\, C \in K^{n\times m}$. Probar que:

i) $A.B = A.C \Rightarrow B = C$

ii) $A.B = 0 \Rightarrow B = 0$

Ejercicio 14. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es verdadera o falsa

i) $A\,,\, B \in GL(n, K) \Rightarrow A + B \in GL(n, K)$

ii) $A \in GL(n, K) \iff A^t \in GL(n, K)$

iii) $tr(A) = 0 \Rightarrow A \notin GL(n, K)$

iv) A nilpotente (es decir, $\exists j \in \mathbb{N}$ / $A^j = 0$) $\Rightarrow A \notin GL(n, K)$

Ejercicio 15. Sea $A \in K^{m\times n}$ y sea $b \in K^m$. Sea $H = \{x \in K^n \,/\, A.x = b\}$. Probar que:

i) Si $C \in GL(n, K)$, entonces $H = \{x \in K^n \,/\, (C.A).x = C.b\}$

ii) Si $m = n$ y $A \in GL(n, K)$, entonces H tiene un solo elemento. ¿Cuál es?
(Notar que esto significa que si A es inversible, cualquier sistema lineal cuya matriz asociada sea A tiene solución única).

Ejercicio 16. Para cada i, j $(1 \leq i, j \leq n)$, sea $E^{ij} \in K^{n\times n}$ la matriz:

$$(E^{ij})_{kl} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \text{ y } j = l \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Las matrices E^{ij} se llaman **matrices canónicas** de $K^{n\times n}$.

i) Si $a \in K - \{0\}$ y $1 \leq i \leq n$, se define $M_i(a) \in K^{n\times n}$ como

$$M_i(a) = E^{11} + E^{22} + ... + a.E^{ii} + E^{(i+1)(i+1)} + ... + E^{nn} = I_n + (a-1).E^{ii}$$

Escribir todas las posibles $M_i(a)$ para $n = 2, 3, 4$ $(a \in K)$.

ii) Sean $1 \leq i, j \leq n$, con $i \neq j$. Se define la matriz $P^{ij} \in K^{n\times n}$ como la matriz que se obtiene permutando la fila i con la fila j de la matriz identidad. Comprobar que

$$P^{ij} = I_n - E^{ii} - E^{jj} + E^{ij} + E^{ji}$$

Escribir todas las posibles P^{ij} para $n = 2, 3, 4$.

iii) Sean $1 \leq i, j \leq n$, con $i \neq j$ y $a \in K$. Se define la matriz $T^{ij}(a) \in K^{n\times n}$ como

$$T^{ij}(a) = I_n + a.E^{ij}$$

Escribir todas las posibles $T^{ij}(a)$ para $n = 2, 3, 4$ ($a \in K$).

Las matrices $M_i(a)$, P^{ij} y $T^{ij}(a)$ se llaman **matrices elementales** de $K^{n\times n}$.

Ejercicio 17. Sean $M_i(a)$, P^{ij} y $T^{ij}(a)$ las matrices elementales de $K^{n\times n}$. Probar:

i) $M_i(a) \in GL(n, K)$ con $(M_i(a))^{-1} = M_i(\frac{1}{a})$

ii) $P^{ij} \in GL(n, K)$ con $(P^{ij})^{-1} = P^{ij}$

iii) $T^{ij} \in GL(n, K)$ con $(T^{ij}(a))^{-1} = T^{ij}(-a)$

Ejercicio 18. Sea $A \in K^{n\times m}$, $A = (a_{ij})$ y sea F_i ($1 \leq i \leq n$) la i-ésima fila de A, es decir, $F_i = (a_{i1}, ..., a_{im})$ y $A = \begin{pmatrix} F_1 \\ . \\ . \\ . \\ F_n \end{pmatrix}$. Sean E^{ij} las matrices canónicas y sean $M_i(a)$, P^{ij} y $T^{ij}(a)$ las matrices elementales de $K^{n\times n}$. Probar que:

i) Si $A' = E^{ij}.A$, entonces $A' = \begin{pmatrix} F'_1 \\ . \\ . \\ . \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = (0, ..., 0)$ si $k \neq i$ y $F'_i = F_j$.

ii) Si $A' = M_i(a).A$, entonces $A' = \begin{pmatrix} F'_1 \\ . \\ . \\ . \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \neq i$ y $F'_i = a.F_i$.

iii) Si $A' = P^{ij}.A$, entonces $A' = \begin{pmatrix} F'_1 \\ . \\ . \\ . \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \neq i$, j ; $F'_i = F_j$ y $F'_j = F_i$.

iv) Si $A' = T^{ij}(a).A$, entonces $A' = \begin{pmatrix} F'_1 \\ . \\ . \\ . \\ F'_n \end{pmatrix}$ con $F'_k = F_k$ si $k \neq i$ y $F'_i = F_i + a.F_j$.

Notar como conclusión de ii), iii) y iv) que triangular por filas una matriz es multiplicar a izquierda por varias matrices elementales.

¿Cómo se pueden obtener las matrices elementales a partir de la matriz identidad?

Ejercicio 19.

i) Sea $A = T^{12}(1) \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Calcular A^{20} y $20.A$

ii) Calcular $(P^{ij})^{15}$ y $(P^{ij})^{16}$

iii) Sea $B = M_3(2) \in \mathbb{R}^{4\times 4}$. Calcular B^{20} y $20.B$

Ejercicio 20. Averiguar si las siguientes matrices son inversibles y en caso afirmativo exhibir sus inversas

$$\text{i)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ii)}\quad A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{iii)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\text{iv)}\quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 8 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \text{v)}\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Escribir las que sean inversibles como producto de matrices elementales.

Ejercicio 21. Sea $A \in K^{n\times n}$ y sea $b \in K^n$

i) Probar que el sistema $A.x = b$ tiene solución única $\iff$ $A \in GL(n, K)$

ii) Probar que $A \in GL(n, K)$ $\iff$ las filas de A son linealmente independientes $\iff$ las columnas de A son linealmente independientes.

Ejercicio 22. Sea $A \in K^{n\times n}$.

i) Probar que $\exists\, B \in K^{n\times n}/B.A = I_n \iff A \in GL(n, K)$

ii) Deducir que $\exists\, B \in K^{n\times n}/A.B = I_n \iff A \in GL(n, K)$