ÁLGEBRA LINEAL

Práctica N°3: Coordenadas - Transformaciones lineales

Coordenadas

Ejercicio 1. Encontrar las coordenadas de $v \in V$ respecto de la base B en los siguientes casos:

i) $V = K^n$; $v = (x_1, ..., x_n)$ y B la base canónica

ii) $V = \mathbb{R}^3$; $v = (1, 2, -1)$ y $B = \{(1, 2, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$

iii) $V = \mathbb{R}^3$; $v = (1, -1, 2)$ y $B = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)\}$

iv) $V = \mathbb{R}^3$; $v = (x_1, x_2, x_3)$ y $B = \{(1, 2, -1), (2, 1, 3), (1, 3, 2)\}$

v) $V = \mathbb{R}_3[X]$; $v = 2X^2 - X^3$ y $B = \{3 , 1 + X , X^2 + 5 , X^3 + X^2\}$

vi) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$; $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$

Ejercicio 2. Calcular $C(B, B')$ en los siguientes casos:

i) $V = \mathbb{R}^2$, $B = \{(1, 1), (1, 2)\}$, $B' = \{(-1, 3), (2, 5)\}$

ii) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$, $B' = \{(-1, 1, 1), (2, 0, 1), (1, -1, 3)\}$

iii) $V = \mathbb{R}^3$, $B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)\}$, $B' = \{(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}$

iv) $V = \mathbb{R}_2[X]$, $B = \{3 , 1 + X , X^2\}$, $B' = \{1 , X + 3 , X^2 + X\}$

v) $V = \mathbb{R}^4$, $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $B' = \{v_3, v_1, v_4, v_2\}$

iv) $V = \mathbb{R}^{2\times 2}$, $B = \{E^{11}, E^{12}, E^{21}, E^{22}\}$, $B' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \right\}$

Ejercicio 3. Dado $v \in V$ y las bases B y B', hallar las coordenadas de v respecto de B y utilizando la matriz de cambio de base, las coordenadas de v respecto de B'.

i) $v = (2, 3)$ y B , B' como en el Ejercicio 2, i)

ii) $v = (-1, 5, 6)$ y B , B' como en el Ejercicio 2, ii)

iii) $v = (-1, 5, 6)$ y B , B' como en el Ejercicio 2, iii)

iv) $v = 2.v_1 + 3.v_2 - 5.v_3 + 7.v_4$ y B , B' como en el Ejercicio 2, v)

v) $v = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ y B , B' como en el Ejercicio 2, vi)

Ejercicio 4.

i) Sean A , $B \in K^{n\times n}$ tales que, $\forall x \in K^n$, $A.x = B.x$. Probar que $A = B$.

ii) Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sean B , B' y B$''$ bases de V. Probar que $C(B,B'') = C(B',B'').C(B,B')$

ii) Deducir que $C(B,B') \in GL(n,K)$ con $C(B,B')^{-1} = C(B',B)$

Ejercicio 5. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de K^3, hallar una base B' tal que $M = C(B,B')$

Ejercicio 6. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la base $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ de K^3, hallar una base B tal que $M = C(B,B')$

<u>Transformaciones lineales</u>

Ejercicio 7. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales

i) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2,x_3) = (x_2 - 3.x_1 + \sqrt{2}.x_3 \, , \, x_1 - \frac{1}{2}.x_2)$

ii) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1,x_2) = (x_1 - x_2 \, , \, 2.x_2 \, , \, 1 + x_1)$

iii) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x_1,x_2,x_3) = (2.x_1 - 7.x_3 \, , \, 0 \, , \, 3.x_2 + 2.x_3)$

iv) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x_1,x_2) = (x_1 + x_2 \, , \, |x_1|)$

v) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = i.z$ (considerando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$ -espacio vectorial.)

vi) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = i.Im(z)$ (considerando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.)

vii) $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \overline{z}$ (considerando a $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$ -espacio vectorial.)

viii) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$, $f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}.a_{22} - a_{12}.a_{21}$

ix) $f : \mathbb{R}^{2\times 3} \to \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = (3.a_{13} - a_{23} \, , \, a_{11} + 2.a_{22} - a_{23} \, , \, a_{22} - a_{12})$

x) $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 3}$, $f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & a_{12} + a_{21} \\ 0 & a_{11} & a_{22} - a_{11} \end{pmatrix}$

xi) $f : \mathbb{C}^{2\times 2} \to \mathbb{C}^{2\times 2}$, $f\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \overline{a_{12}} \\ \overline{a_{21}} & a_{22} \end{pmatrix}$ (considerando a $\mathbb{C}^{2\times 2}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial y como $\mathbb{C}$ -espacio vectorial.)

Ejercicio 8. Interpretar geométricamente las siguientes aplicaciones lineales $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

i) $f(x,y) = (x,0)$

ii) $f(x,y) = (0,y)$

iii) $f(x,y) = (x,-y)$

iv) $f(x,y) = (\frac{1}{2}.(x+y), \frac{1}{2}.(x+y))$

v) $f(x,y) = (x.\cos t - y.\operatorname{sen} t \, , \, x.\operatorname{sen} t + y.\cos t)$

Ejercicio 9.

i) Encontrar una función $f : V \to V$ (para un K-espacio vectorial V conveniente) que cumpla $f(v+w) = f(v) + f(w)$ para cualquier par de vectores $v\,,\, w \in V$ pero que no sea una transformación lineal.

ii) Encontrar una función $f : V \to V$ (para un K-espacio vectorial V conveniente) que cumpla $f(k.v) = k.f(v)$ para cualquier escalar $k \in K$ y cualquier vector $v \in V$ pero que no sea una transformación lineal.

Ejercicio 10. Probar la linealidad de las siguientes aplicaciones:

i) $tr : K^{n\times n} \to K$

ii) $t : K^{n\times m} \to K^{m\times n}\ ,\ t(A) = A^t$

iii) $f : K^{n\times m} \to K^{r\times m}\ ,\ f(A) = B.A$ donde $B \in K^{r\times n}$

iv) $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})\ ,\ \delta(f) = f'$

v) $\epsilon_\alpha : K[X] \to K\ ,\ \epsilon_\alpha(f) = f(\alpha)$ donde $\alpha \in K$

vi) $s : K^{\mathbb{N}} \to K^{\mathbb{N}}\ ,\ s(\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}) = (0, a_1, a_2, ..., a_n, ...)$

Ejercicio 11.

i) Probar que existe una única transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = (-5,3)$ y $f(-1,1) = (5,2)$. Para dicha f, determinar $f(5,3)$ y $f(-1,2)$

ii) ¿Existirá una transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(1,1) = (2,6)$; $f(-1,1) = (2,1)$ y $f(2,7) = (5,3)$?

iii) Sean $f\,,\, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transformaciones lineales tales que $f(1,0,1) = (1,2,1)\,,\ f(2,1,0) = (2,1,0)\,,\ f(-1,0,0) = (1,2,1)\,,\ g(1,1,1) = (1,1,0)\,,\ g(2,2,-1) = (3,-1,2)$ y $g(3,2,1) = (0,0,1)$. Determinar si $f = g$.

iv) Hallar todos los $a \in \mathbb{R}$ para los cuales exista una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que satisfaga que $f(1,-1,1) = (2,a,-1)\,,\ f(1,-1,2) = (a^2,-1,1)$ y $f(1,-1,-2) = (5,-1,-7)$

v) Hallar una fórmula para todas las transformaciones lineales $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^3$ que satisfacen $f(X^3+2X^2-X+4) = (6,5,3)\,,\ f(3X^2+2X-5) = (0,0,-3)\,,\ f(X^3-2X^2+3X-2) = (0,-1,1)$ y $f(2X^3-3X^2+7) = (6,4,7)$

Ejercicio 12.

i) Calcular bases del núcleo y de la imagen para cada tranformación lineal del ejercicio 7. Decidir, en cada caso, si f es epimorfismo, monomorfismo o isomorfismo. En el caso que sea isomorfismo, calcular f^{-1}

ii) Clasificar las transformaciones lineales $tr\,,\ t\,,\ \delta\,,\ \epsilon_\alpha$ y s del ejercicio 10 en epimorfismos, monomorfismos e isomorfismos.

Ejercicio 13. Sean $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4\ ,\ f(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2, x_1+x_3, 0, 0)$ y $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2\ ,$ $g(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1-x_2, 2x_1-x_2)$ Calcular el núcleo y la imagen de f, de g y de $g\circ f$. Decidir si son monomorfismos, epimorfismos o isomorfismos.

Ejercicio 14. Sean $g : V \to V'$ y $\mathrm{f} : \mathrm{V}' \to \mathrm{V}''$ transformaciones lineales. Probar

i) $\mathrm{Nu}(g) \subseteq \mathrm{Nu}(f \circ g)$

ii) Si $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$, entonces $\mathrm{Nu}(g) = \mathrm{Nu}(f \circ g)$

iii) $\mathrm{Im}(f \circ g) \subseteq \mathrm{Im}(f)$

iv) Si $\mathrm{Im}(g) = V'$, entonces $\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f)$

Ejercicio 15.

i) Sean S , $T \subset \mathbb{R}^4$ definidos por $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ y $T = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/2.x_1 + x_4 = 0 \, , x_2 - x_3 = 0\}$. ¿Existirá algún isomorfismo $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ tal que $f(S) = T$?

ii) ¿Existirá algún monomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$?

iii) ¿Existirá algún epimorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$?

iv) Sean $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (1, 1, 1, 0)$ y $v_3 = (1, 1, 1, 1)$. ¿Existirá alguna transformación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathrm{Im}(f)$?

Ejercicio 16. Determinar si existe (y en caso afirmativo hallar) una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ que verifique $\mathrm{Im}(f) = S$ y $\mathrm{Nu}(f) = T$ en los siguientes casos

i) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 + x_2 - x_3 + 2.x_4 = 0\}$, $T =< (1, 2, 1) >$

ii) $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4)/x_1 + x_2 = 0 \ , \ x_3 + x_4 = 0\}$, $T =< (1, -2, 1) >$

Ejercicio 17. En cada uno de los siguientes casos encontrar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que verifique lo pedido:

i) $(1, 1, 0) \in \mathrm{Nu}(f)$ y $\dim(\mathrm{Im}(f))= 1$

ii) $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) =< (1, 1, 2) >$

iii) $f \neq 0$ y $\mathrm{Nu}(f) \subseteq \mathrm{Im}(f)$

iv) $f \neq 0$ y $f \circ f = 0$

v) $f \neq Id$ y $f \circ f = Id$

vi) $\mathrm{Nu}(f) \neq \{0\}$, $\mathrm{Im}(f) \neq \{0\}$ y $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$

Ejercicio 18. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V. Se define la aplicación $\alpha_B : V \to K^n$ de la siguiente manera:

$$\text{Si } v = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i \ , \ \alpha_B(v) = (x_1, ..., x_n)$$

Probar que α_B es un isomorfismo. Observar que, teniendo en cuenta que la aplicación α_B es tomar coordenadas en la base B, esto nos permite trabajar con coordenadas en una base en el siguiente sentido:

i) $\{w_1, ..., w_s\}$ es linealmente independiente en $V \iff \{\alpha_B(w_1), ..., \alpha_B(w_s)\}$ es linealmente independiente en K^n

ii) $\{w_1, ..., w_r\}$ es un sistema de generadores de $V \iff \{\alpha_B(w_1), ..., \alpha_B(w_r)\}$ es un sistema de generadores de K^n

iii) $\{w_1, ..., w_n\}$ es una base de $V \iff \{\alpha_B(w_1), ..., \alpha_B(w_n)\}$ es una base de K^n Por ejemplo, para decidir si $\{X^2 - X + 1 \ , \ X^2 - 3.X + 5 \ , \ 2.X^2 + 2.X - 3\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[X]$, bastará ver si $\{(1, -1, 1) \ , \ (1, -3, 5) \ , \ (2, 2, -3)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ para lo que se puede usar el método de triangulación. Rehacer los items ii) y iii) de los ejercicios 34 y 35 de la práctica N°1 utilizando coordenadas.

Ejercicio 19. Sea V un K-espacio vectorial y $f : V \to V$ una transformación lineal. Probar que $f \circ f = f \iff f(v) = v \ \ \forall v \in \mathrm{Im}(f)$ Una transformación lineal que cumple esto se llama **proyector**.

Ejercicio 20. En cada uno de los siguientes casos construir un proyector $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ que cumpla

i) $\mathrm{Im}(f) = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

ii) $\mathrm{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

iii) $\mathrm{Nu}(f) = \{(x_1, x_2, x_3)/3.x_1 - x_3 = 0\}$ e $\mathrm{Im}(f) =< (1, 1, 1) >$

Ejercicio 21. Sea V un K-espacio vectorial y $f : V \to V$ un proyector. Probar

i) $V = \mathrm{Nu}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$

ii) $g = id_V - f$ es un proyector con $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Nu}\ (f)$ y $\mathrm{Nu}(g) = \mathrm{Im}\ (f)$

Ejercicio 22. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sean S y T subespacios de V tales que $V = S \oplus T$. Probar que existe un único proyector $f : V \to V$ tal que $\mathrm{Nu}(f) = S$ e $\mathrm{Im}(f) = T$.

Ejercicio 23. Sea V un K-espacio vectorial y $f : V \to V$ una transformación lineal. Se dice que f es nilpotente si $\exists\, s \in \mathbb{N} \,/\, f^s = 0$

i) Probar que si f es nilpotente, entonces f no es ni monomorfismo ni epimorfismo.

ii) Si V es de dimensión n probar que f es nilpotente $\iff f^n = 0$ (Sugerencia: considerar si las inclusiones $\mathrm{Nu}(f^i) \subseteq \mathrm{Nu}(f^{i+1})$ son estrictas o no).

iii) Sea $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de V. Se define la transformación lineal $f : V \to V$ de la siguiente forma:

$$f(v_i) = \begin{cases} v_{i+1} & \text{si } 1 \leq i \leq n-1 \\ 0 & \text{si } i = n \end{cases}$$

Probar que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$.

iv) Si $V = \mathbb{R}^n$, para cada i , $2 \leq i \leq n$ construir una transformación lineal nilpotente $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f^i = 0$ y $f^{i-1} \neq 0$.

Ejercicio 24. Sea $S =< (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) > \subseteq \mathbb{R}^4$.

i) Hallar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ tal que $Nu(f) = S$.

ii) Hallar ecuaciones para S (usar i))

iii) Hallar un sistema de ecuaciones lineales cuyo conjunto de soluciones sea
$< (1, 1, 0, 1), (2, 1, 0, 1) > + (0, 1, 1, 2)$

Ejercicio 25.

i) Sea $S \subseteq K^n$ el conjunto de soluciones de un sistema lineal homogéneo. Encontrar una transformación lineal $f : K^n \to K^n$ tal que $Nu(f) = S$

ii) Sea $T \subseteq K^n$ el conjunto de soluciones de un sistema lineal no homogéneo. Encontrar una transformación lineal $f : K^n \to K^n$ y $x \in K^n$ tales que $T = f^{-1}(x)$

Ejercicio 26. Sea $f : V \to V$ una tranformación lineal y B , B' bases de V, calcular $|f|_{BB'}$ en cada uno de los siguientes casos:

i) $V = \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (3.x_1 - 2.x_2 + x_3, 5.x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 3.x_2 + 4.x_3)$, $B = B'$ la base canónica de $\mathbb{R}^3$

ii) $V = \mathbb{R}^3$, $f(x_1, x_2, x_3) = (3.x_1 - 2.x_2 + x_3, 5.x_1 + x_2 - x_3, x_1 + 3.x_2 + 4.x_3)$, $B = \{(1, 2, 1), (-1, 1, 3), (2, 1, 1)\}$ y $B' = \{(1, 1, 0), (1, 2, 3), (-1, 3, 1)\}$

iii) $V = \mathbb{C}^2$, $f(x_1, x_2) = (2.x_1 - i.x_2, x_1 + x_2)$, $B = B'$ es la base canónica de $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{C}$-espacio vectorial.

iv) $V = \mathbb{C}^2$, $f(x_1, x_2) = (2.x_1 - i.x_2, x_1 + x_2)$, $B = B' = \{(1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i)\}$ considerando a $\mathbb{C}^2$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

v) $V = \mathbb{R}_4[X]$, $f(P) = P'$, $B = B' = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$

vi) $V = \mathbb{R}_4[X]$, $f(P) = P'$, $B = B' = \{X^4, X^3, X^2, X, 1\}$

vii) $V = \mathbb{R}_4[X]$, $f(P) = P'$, $B = \{1, X, X^2, X^3, X^4\}$, $B' = \{X^4, X^3, X^2, X, 1\}$

viii) $V = \mathbb{R}^{2\times2}$, $f(A) = A^t$, $B = B'$ la base canónica de $\mathbb{R}^{2\times2}$

ix) V , f y $B = B'$ como en el ejercicio 23, iii)

Ejercicio 27. Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$ y $B' = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ una base de $\mathbb{R}^4$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ la transformación lineal tal que

$$|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

i) Hallar $f(3.v_1 + 2.v_2 - v_3)$ ¿Cuáles son sus coordenadas en la base B'?

ii) Hallar una base de $Nu(f)$ y una base de $Im(f)$.

iii) Describir el conjunto $f^{-1}(w_1 - 3.w_3 - w_4)$

Ejercicio 28. Sea $A \in K^{m\times n}$ y $\theta_A : K^n \to K^m$ la transformación lineal definida por $\theta_A(x) = A.x$. Si E y E' son las bases canónicas de K^n y de K^m respectivamente, probar que $|\theta_A|_{EE'} = A$.

Ejercicio 29. Sean V y W K-espacios vectoriales y sea

$$\mathrm{Hom}\,(V, W) = \{f : V \to W / f \text{ es lineal}\}$$

i) Probar que $\mathrm{Hom}\,(V, W)$ es un K-espacio vectorial con las operaciones naturales.

ii) Si dim $V = n$ y dim $W = m$, sean B y B' bases de V y de W respectivamente. Sea $T : \mathrm{Hom}\,(V, W) \to K^{m\times n}$ la aplicación definida por $T(f) = |f|_{BB'}$. Probar que T es lineal y que es un isomorfismo. Calcular dim $(\mathrm{Hom}\,(V, W))$.

Ejercicio 30. Sean V , W y U K-espacios vectoriales de dimensión finita y sean B , B' y B'' bases de V , W y U respectivamente. Se consideran las transformaciones lineales $f : V \to W$ y $g : W \to U$. Probar que $|g \circ f|_{BB''} = |g|_{B'B''}.|f|_{BB'}$

Ejercicio 31. Sean V y W K-espacios vectoriales de dimensión finita y sea $f : V \to W$ lineal. Si B y B' son bases de V y U y U' son bases de W, deducir del ejercicio anterior que $|f|_{B'U'} = C(U, U').|f|_{BU}.C(B', B)$

Ejercicio 32. Sea V un K-espacio vectorial y $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ una base de V. Sea $f : V \to V$ la transformación lineal tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i) Calcular $|f^{-1}|_B$

ii) Calcular $f^{-1}(v_1 - 2.v_2 + v_4)$

Ejercicio 33. En cada uno de los siguientes casos, hallar una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ para un n adecuado que verifique:

i) $A \neq I_n$ y $A^3 = I_n$

ii) $A \neq 0$; $A \neq I_n$ y $A^2 = A$

Ejercicio 34. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea B una base de V.

i) Sea $tr : \mathrm{Hom}\,(V, V) \to K$ la aplicación definida por $tr(f) = tr(|f|_B)$. Probar que $tr(f)$ no depende de la base B elegida.

ii) Probar que $tr : \mathrm{Hom}\,(V, V) \to K$ es una transformación lineal. $tr(f)$ se llama la **traza** del endomorfismo f.

Ejercicio 35. Sean $B = \{v_1, v_2, v_3\}$, $U = \{v_1 + v_3, v_1 + 2.v_2 + v_3, v_2 + v_3\}$ y $U' = \{w_1, w_2, w_3\}$ bases de $\mathbb{R}^3$, E la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal tal que

$$|f|_{BE} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad |f|_{UU'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determinar U'.

Ejercicio 36.

i) Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ la trasformación lineal definida por
$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3)$$
y sea $v = (1, 0, 0, 0)$. Probar que $B = \{v, f(v), f^2(v), f^3(v)\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$. Calcular $|f|_B$.

ii) Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \to V$ una tranformación lineal tal que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$. Probar que existe una base B de V tal que

$$(|f|_B)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j + 1 \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

(Sugerencia: elegir $v_1 \notin Nu(f^{n-1})$).

Ejercicio 37. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión n y sea $f : V \to V$ un proyector. Probar que existe una base B de V tal que

$$(|f|_B)_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \ ; \ i \leq \dim(Im(f)) \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

(Sugerencia: ver Ejercicio 21.)

Ejercicio 38. Sea $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ definida por
$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2.x_1 - x_5, x_2 + 2.x_3, x_1 + x_4 + x_5, -x_1 + x_4 + x_5)$. Encontrar bases B y B' de $\mathbb{R}^5$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente tales que $|f|_{BB'}$ sea una matriz diagonal.

Ejercicio 39. Sean V y W K-espacios vectoriales, dim $V = n$ y dim $W = m$ y $f : V \to W$ una transformación lineal tal que dim $(Im(f)) = s$. Probar que existe una base B de V y una base B' de W tal que

$$(|f|_{BB'})_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \ ; \ i \leq s \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

Ejercicio 40. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por
$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, 2.x_1 - 3.x_2 + 2.x_3, 3.x_1 - 2.x_2 + x_3)$.

i) Determinar bases B y B' de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$|f|_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) Si A es la matriz de f en la base canónica, encontrar matrices C , $D \in GL(3, \mathbb{R})$ tales que

$$C.A.D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 41. Calcular el rango de las siguientes matrices:

$$\text{i)} A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{ii)} A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{iii)} A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{iv)} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 42. Calcular el rango de $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ para cada $k \in \mathbb{R}$ siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & -1 \\ -1 & 1 & k^2 \\ 1 & k & k-2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 43.

i) Sea $A \in K^{m\times n}$ y sea $S = \{x \in K^n \,/\, A.x = 0\}$. Probar que $\mathrm{rg}(A) + \dim(S) = n$ (Esto significa que la dimensión del espacio de soluciones es igual a la cantidad de incógnitas menos la cantidad de ecuaciones independientes)

ii) Sea $A \in K^{m\times n}$, $b \in K^m$. Se considera el sistema $A.x = b$ y sea $(A\,|\,b)$ su matriz ampliada. Probar que $A.x = b$ tiene solución $\iff \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A\,|\,b)$.

Ejercicio 44. Sea $A \in K^{m\times n}$, $\mathrm{rg}(A) = s$ y sea $T = \{x \in K^{n\times r}/A.x = 0\}$. Calcular la dimensión de T.

Ejercicio 45. Sea $A \in K^{m\times n}$ y $B \in K^{n\times r}$. Probar que $\mathrm{rg}(A.B) \leq \mathrm{rg}(A)$ y $\mathrm{rg}(A.B) \leq \mathrm{rg}(B)$

Ejercicio 46. Sean $A \in K^{m\times n}$, $C \in GL(m, K)$ y $D \in GL(n, K)$

i) Probar que $\mathrm{rg}(C.A) = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A.D)$

ii) Deducir que $\mathrm{rg}(C.A.D) = \mathrm{rg}(A)$

Ejercicio 47. Sean A , $B \in K^{m\times n}$. Se dice que A es **equivalente** a B (y se nota $A \equiv B$) si existen $C \in GL(m, K)$ y $D \in GL(n, K)$ tales que $A = C.B.D$. Probar que $\equiv$ es una relación de equivalencia en $K^{m\times n}$.

Ejercicio 48. Sean A , $D \in \mathbb{R}^{3\times 3}$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

i) Determinar C_1 , C_2 , C_3 y $C_4 \in GL(3, \mathbb{R})$ tales que

$$C_1.A.C_2 = C_3.D.C_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Sugerencia: ver Ejercicio 40.)

ii) Determinar $f \in \mathrm{Hom}\,(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ y bases B , B' , B_1 y B'_1 de $\mathbb{R}^3$ tales que

$$|f|_{BB'} = A \qquad \text{y} \qquad |f|_{B_1 B'_1} = D$$

Ejercicio 49. Sean A , $C \in K^{m\times n}$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $A \equiv C$

ii) $\exists\, f : K^n \to K^m$ tranformación lineal, bases B y B_1 de K^n y bases B' y B'_1 de K^m tales que $|f|_{BB'} = A$ y $|f|_{B_1 B'_1} = C$

iii) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C)$

Ejercicio 50. Dadas A , $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, decidir si existen matrices P , $Q \in GL(n, \mathbb{R})$ tales que $A = P.B.Q$.

i) $n = 2$; $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

ii) $n = 2$; $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

iii) $n = 3$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 & 8 & 5 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

iv) $n = 3$; $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 51. Sean $A, B \in K^{n\times n}$. Se dice que A es **semejante** a B (y se nota $A \sim B$) si existe $C \in GL(n, K)$ tal que $A = C.B.C^{-1}$.

i) Demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia en $K^{n\times n}$.

ii) Probar que dos matrices semejantes son equivalentes. ¿Vale la recíproca?

Ejercicio 52. Sean A , $C \in K^{n\times n}$. Probar que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) $A \sim C$

ii) $\exists\, f : K^n \to K^n$ tranformación lineal y bases B y B' de K^n tales que $|f|_B = A$ y $|f|_{B'} = C$

Ejercicio 53.

i) Sean A , $C \in K^{n\times n}$ tales que $A \sim C$. Probar que $tr(A) = tr(C)$

ii) Sean A , $C \in \mathbb{R}^{3\times 3}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Existen $f \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ y bases B y B' de $\mathbb{R}^3$ tales que $|f|_B = A$ y $|f|_{B'} = C$?

Ejercicios de parcial

1. Sea $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}$ la transformación lineal definida por $f(A) = 4.A - 2\,tr(A).I_n$.

   (a) Si $n = 2$, probar que $\mathrm{Nu}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^{2\times 2}$.

   (b) Si $n \geq 3$, probar que f es un isomorfismo.

2. Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^{2\times 2}$: $S = \{A \in \mathbb{R}^{2\times 2} / \,tr(A) = 0\}$ y $T = \{B \in \mathbb{R}^{2\times 2} / \,B = B^t\}$ Hallar una transformación lineal $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ que satisfaga **simultáneamente** $f(S) = T$, $f(T) = S$ y $f(v) \neq v$, $\forall\, v \in T - \{0\}$.

   (Justificar que la f hallada cumple todo lo pedido).

3. Dadas $B = \{X^2 + X,\ X,\ X^2 + X + 1\}$ y $B' = \{X^2,\ 1,\ X\}$ bases de $\mathbb{R}_2[X]$, se considera la transformación lineal $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ tal que

$$|f|_{B,B'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & a & 1 \\ a & 1 & 2a-2 \end{pmatrix}$$

   Encontrar todos los $a, b \in \mathbb{R}$ para los que f cumple **simultáneamente** $\dim \mathrm{Nu}(f) = 1$ y $(b+1).X + b \in \mathrm{Im}(f)$.

4. Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 2}$ y sea $B \in \mathbb{R}^{2\times 4}$ tales que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = 2$. Probar que $\mathrm{rg}(A.B) = 2$.

5. Se consideran los siguientes subespacios de $\mathbb{R}_3[X]$:

$$S = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(1) = 0 \,\wedge\, P'(2) = 0\}$$
$$T = < X^3 - 2X^2 + 2X - 2\,,\ 6X^2 - 12X + 4\,,\ 2X^3 + 2X^2 - 8X >$$

   (a) Hallar una transformación lineal $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X]$ que satisfaga **simultáneamente** $f(S+T) = S \cap T\,,\qquad \mathrm{Im}(f) = T \qquad$ y $\qquad f^2 = 0$.

   (b) Sea H un subespacio de dimensión 3 de $\mathbb{R}_3[X]$ tal que $\dim(H \cap T)$ =1. Para **cualquier** transformación lineal f que cumpla las condiciones del ítem i) calcular $f(H)$.