ÁLGEBRA LINEAL

Práctica N°6: Autovalores y autovectores - Diagonalización

Ejercicio 1. Calcular el polinomio característico, los autovalores y los autovectores de la matriz A, analizando por separado los casos $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$, en cada uno de los siguientes casos:

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ ii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ iii) $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

iv) $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ v) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$ vi) $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

vii) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$ viii) $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ix) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2. Para cada una de las matrices A del ejercicio anterior, sea U una base de K^n y sea $f : K^n \to K^n$ la tranformación lineal tal que $|f|_U = A$.
Decidir si es posible encontrar una base B de K^n tal que $|f|_B$ sea diagonal. En caso afirmativo, calcular $C(U, B)$.

Ejercicio 3. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por:
$$f(x, y, z) = (-x - 2y + 2z, y, -x - 3y - 4z)$$

i) Encontrar una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $|f|_B$ sea diagonal.

ii) Sean A, C y $D \in K^{n\times n}$ tales que $A = D.C.D^{-1}$. Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A^n = D.C^n.D^{-1}$

iii) Calcular $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.Calcular $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

iv) ¿Existe una matriz $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ tal que $P^2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$?

Ejercicio 4.

i) Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in K^{2\times 2}$. Determinar todos los a , b y $c \in K$ para los que A es diagonalizable.

ii) Probar que toda matriz $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ es diagonalizable o bien es semejante a una matriz del tipo $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}$.

Ejercicio 5. Diagonalizar las matrices $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{6\times 6}$ encontrando sus autovectores:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sugerencia: no intentar calcular el polinomio característico.

Ejercicio 6. Se sabe que la matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ tiene a $(1, -1)$ como autovector de autovalor $\sqrt{2}$ y, además, $\mathcal{X}_A \in \mathbb{Q}[X]$. Decidir si A es diagonalizable en $\mathbb{R}^{2\times 2}$. ¿Es A única?

Ejercicio 7.

i) Sea $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalizable con $tr(A) = -4$. Calcular los autovalores de A, sabiendo que los autovalores de $A^2 + 2.A$ son -1, 3 y 8.

ii) Sea $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ tal que $\det(A) = 6$; 1 y -2 son autovalores de A y -4 es autovalor de la matriz $A - 3.I_4$. Hallar los restantes autovalores de A.

Ejercicio 8. Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

i) Probar que, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A^n.\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_n \\ F_{n+1} \end{pmatrix}$ donde F_i es el i-ésimo término de la sucesión de Fibonacci (es decir, $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ y $F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$).

ii) Encontrar una matriz $P \in GL(2, \mathbb{R})$ tal que $P.A.P^{-1}$ sea diagonal.

iii) Hallar la fórmula general para el término F_n , $\forall\ n \in \mathbb{N}_0$

iv) Se define la sucesión $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = 0\,,\ a_1 = 1\,,\ a_2 = 1 \\ a_{n+3} = 6.a_{n+2} - 11.a_{n+1} + 6a_n \quad \forall\ n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Hallar una fórmula general para el término a_n , $\forall\ n \in \mathbb{N}_0$.

Ejercicio 9. Sea $A \in K^{n\times n}$. Probar que A y A^t tienen los mismos autovalores. Dar un ejemplo en el que los autovectores sean distintos.

Ejercicio 10. Sea $\delta : C^\infty(\mathbb{R}) \to C^\infty(\mathbb{R})$ la transformación lineal derivación. Mostrar que todo número real es un autovalor de δ y exhibir un autovector correspondiente.

Ejercicio 11. Analizar la validez de las siguientes afirmaciones:

i) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible $\Rightarrow$ 0 no es autovalor de A.

ii) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversible, x autovector de $A \Rightarrow x$ autovector de A^{-1}.

iii) $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ con n impar $\Rightarrow A$ admite un autovalor real.

iv) Si A , $B \in K^{n\times n}$, la suma de todos los autovalores de $A + B$ es igual a la suma de todos los autovalores de A y de B.

Ejercicio 12.

i) Sea $f : K^n \to K^n$ un proyector con dim(Im(f))=s. Calcular $\mathcal{X}_f$. ¿Es f diagonalizable?

ii) Sea K un cuerpo incluido en $\mathbb{C}$ y sea $f : K^n \to K^n$ un morfismo nilpotente. Calcular $\mathcal{X}_f$. ¿Es f diagonalizable?

Ejercicio 13. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ que verifica $A^2 + I_n = 0$. Probar que A es inversible, que no tiene autovalores reales y que n debe ser par.

Ejercicio 14. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal tal que dim $(\mathrm{Im}(f)) = 1$.
Probar que f es diagonalizable si y sólo si $\mathrm{Nu}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$.

Ejercicio 15. Sea $D \in K^{n\times n}$ una matriz inversible y diagonal. Sea $f : K^{n\times n} \to K^{n\times n}$ la transformación lineal definida por $f(A) = D^{-1}AD$. Hallar los autovalores y los autovectores de f y probar que es diagonalizable.

Ejercicio 16. Sea $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ una transformación lineal. Probar que existe una base B de $\mathbb{C}^n$ tal que $|f|_B$ es triangular superior.

Ejercicio 17. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y sean $\lambda_1, ..., \lambda_n$ las raíces de $\mathcal{X}_A$ contadas con multiplicidad.

i) Probar que $\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i$

ii) Probar que $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$

Ejercicio 18. Sean $A \in K^{m\times n}$ y $B \in K^{n\times m}$.

i) Probar que las matrices de $K^{(m+n)\times(m+n)}$ $\begin{pmatrix} A.B & 0 \\ B & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ B & B.A \end{pmatrix}$ son semejantes.

ii) Deducir que, si $n = m$, $\mathcal{X}_{A.B} = \mathcal{X}_{B.A}$

Ejercicio 19. Dadas las matrices $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ y los polinomios $P \in \mathbb{C}[X]$, calcular $P(A)$ para:

i) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ con $\begin{cases} \text{a)} \quad P = X - 1 \\ \text{b)} \quad P = X^2 - 1 \\ \text{c)} \quad P = (X-1)^2 \end{cases}$

ii) $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$, $P = X^3 - i.X^2 + 1 + i$

Ejercicio 20. Sea $A \in K^{n\times n}$ y sean P y $Q \in K[X]$

i) Probar que:

(a) Si a , $b \in K$, $(a.P + b.Q)(A) = a.P(A) + b.Q(A)$

(b) $(P.Q)(A) = P(A).Q(A)$.

(c) $P^n(A) = (P(A))^n$

ii) ¿Es cierto que $P(A).Q(A) = 0 \Rightarrow P(A) = 0$ ó $Q(A) = 0$?

iii) Si P y Q coprimos y $x \in K^n$ es tal que $P(A).x = Q(A).x = 0$, probar que $x = 0$

Ejercicio 21. Sean $A\,,\, B \in K^{n\times n}$. Probar que si A y B son semejantes, entonces $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B$ y $m_A = m_B$. ¿Vale la recíproca?

Ejercicio 22. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Probar que el minimal de A como matriz real y el minimal de A como matriz compleja coinciden.

Ejercicio 23. Hallar el polinomio minimal de las siguientes matrices (comparar con el característico):

i) $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ ii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ iii) $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ iv) $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{pmatrix}$

v) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vi) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ vii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ viii) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ix) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ x) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ xi) $\begin{pmatrix} 1 & i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ xii) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$

xiii) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ xiv) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ xv) $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

Ejercicio 24. Calcular el polinomio minimal para cada una de las siguientes transformaciones lineales:

i) $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]\,,\; f(P) = P' + 2.P$

ii) $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}\,,\; f(A) = A^t$

Ejercicio 25. Calcular el polinomio minimal y el polinomio característico de $A \in K^{n\times n}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Sugerencia: ver el ejercicio 6 de la práctica 5.

Ejercicio 26. Sea $\delta : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ la transformación lineal derivada. Probar que δ no admite ningún polinomio minimal.

Ejercicio 27. Utilizando el Teorema de Hamilton-Cayley:

i) Calcular $A^4 - 4.A^3 - A^2 + 2.A - 5.I_2$ para $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

ii) Calcular A^{1000} para $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

iii) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, expresar a A^{-1} como combinación lineal de A y de I_2.

iv) Dada $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, expresar a $(2.A^4 - 12.A^3 + 19.A^2 - 29.A - 37.I_2)^{-1}$ como combinación lineal de A y de I_2.

v) Dada $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calcular A^{-1} , A^3 y A^{-3}

vi) Calcular $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Ejercicio 28. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Probar que f es un isomorfismo si y sólo si el término constante de $\mathcal{X}_f$ es no nulo. En dicho caso, hallar la expresión general de f^{-1} como polinomio en f.

Ejercicio 29. Exhibir una matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ tal que $A^2 + I_n = 0$. Comparar con el ejercicio 13.

Ejercicio 30. Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal. Sean S y T subespacios de V tales que $\dim(S) = s$, $\dim(T) = t$ y $S \oplus T = V$. Si S y T son f-invariantes, probar que existe una base B de V y matrices $A_1 \in K^{s \times s}$ y $A_2 \in K^{t \times t}$ tales que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$$

Probar que, en este caso, $\mathcal{X}_f = \mathcal{X}_{A_1}.\mathcal{X}_{A_2}$. ¿Pasa lo mismo con los minimales?

Ejercicio 31.

i) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal definida por $f(x, y) = (x + 3.y, 3.x - 2.y)$. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f-invariantes.

ii) Sea $f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la rotación de ángulo θ. Probar que, para todo $\theta \neq k.\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, f_θ no es diagonalizable. Hallar todos los subespacios de $\mathbb{R}^2$ que sean f_θ-invariantes.

iii) Sea $\theta \in \mathbb{R}$ y $g_\theta : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ la transformación $\mathbb{C}$-lineal cuya matriz en la base canónica es

$$|g_\theta|_E = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

¿Es g_θ diagonalizable? Hallar todos los subespacios de $\mathbb{C}^2$ que sean g_θ-invariantes.

Ejercicio 32. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una tranformación lineal nilpotente tal que $f^n = 0$ y $f^{n-1} \neq 0$. Probar que existe un hiperplano de $\mathbb{R}^n$ que es f-invariante pero que no admite un complemento f-invariante.

Ejercicio 33.

i) Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita y sea $f : V \to V$ una transformación lineal diagonalizable. Si S es un subespacio de V f-invariante, probar que $f : S \to S$ es diagonalizable.

ii) Sean $A\,,\,B \in K^{n\times n}$ tales que $A.B = B.A$ y sea $E_\lambda = \{x \in K^n / A.x = \lambda.x\}$. Probar que E_λ es B-invariante.

iii) Sean $A\,,\,B \in K^{n\times n}$ dos matrices diagonalizables tales que $A.B = B.A$. Probar que existe $C \in GL(n, K)$ tal que $C.A.C^{-1}$ y $C.B.C^{-1}$ son diagonales.

(Es decir A y B se pueden diagonalizar simultáneamente.)

Ejercicio 34.

i) Hallar una matriz $A \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ tal que $m_A(X) = X^3 - 5X^2 + 6X + 8$. Decidir si A es diagonalizable.

ii) Hallar una matriz $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ tal que $m_A(X) = X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 8X + 4$. Decidir si A es diagonalizable.

Ejercicio 35. Sea $A \in K^{n\times n}$

i) Probar que si A es nilpotente, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $m_A(X) = X^k$. Calcular todos los autovalores de A.

ii) Si $K = \mathbb{C}$ y el único autovalor de A es el 0, probar que A es nilpotente. ¿Qué pasa si $K = \mathbb{R}$?

(*) Ejercicio 36. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz de traza nula. Probar que A es semejante a una matriz que tiene toda la diagonal nula.