

ÁLGEBRA LINEAL

Práctica N°7: Forma de Jordan

Ejercicio 1. Dadas las matrices A y A' en $K^{n \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- i) Probar que ambas son nilpotentes y que A es semejante a A' .
- ii) Dar bases B y B' de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tal que la matriz de la derivación en la base B sea A y en la base B' sea A' .
- iii) Sea B una base de K^n y sea $f : K^n \rightarrow K^n$ tal que $|f|_B = A$. Probar que no existen subespacios propios f -invariantes S y T de K^n tales que $K^n = S \oplus T$.

Ejercicio 2. Sean A_i ($1 \leq i \leq 6$) matrices en $\mathbb{C}^{8 \times 8}$ nilpotentes tales que $m_{A_i} = X^3$ ($1 \leq i \leq 6$). ¿Es cierto que necesariamente dos de estas matrices son semejantes?

Ejercicio 3. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A \in \mathbb{C}^{9 \times 9}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ nilpotentes tales que $m_A = m_B$ y $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$. Probar que A y B son semejantes. ¿Es cierto esto en $\mathbb{C}^{7 \times 7}$?

Ejercicio 5. Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j \\ 1 & \text{si } i > j \end{cases}$$

Ejercicio 6.

- i) Decidir si existe $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$ nilpotente tal que $\text{rg}(A) = 6$, $\text{rg}(A^2) = 4$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.
- ii) Decidir si existe $A \in \mathbb{R}^{16 \times 16}$ tal que $m_A(X) = X^5$, $\text{rg}(A) = 9$, $\text{rg}(A^2) = 5$, $\text{rg}(A^3) = 3$, $\text{rg}(A^4) = 1$ y $\text{rg}(A^5) = 0$ simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

Ejercicio 7. Sea $f : \mathbb{C}^7 \rightarrow \mathbb{C}^7$ una transformación lineal y sea B una base de \mathbb{C}^7 tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- i) Hallar \mathcal{X}_f y m_f .
- ii) Sea λ un autovalor de f tal que $\text{mult}(\lambda, \mathcal{X}_f) = m$.
Se definen $E_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^7 / f(v) = \lambda \cdot v\}$ y
 $V_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^7 / (\lambda \cdot \text{Id} - f)^m(v) = 0\} = \text{Nu}((\lambda \cdot \text{Id} - f)^m)$
¿Para qué autovalores λ de f se tiene que $E_\lambda = V_\lambda$?
- iii) Para cada autovalor λ de f , ¿cuál es la menor potencia k tal que $V_\lambda = \text{Nu}((\lambda \cdot \text{Id} - f)^k)$?
- iv) Si λ es un autovalor de f , se nota f_λ a la restricción de f a V_λ .
Calcular $\dim(\text{Im}(f_\lambda))$ y $\dim(\text{Im}(f_\lambda^2))$ para cada λ .

Ejercicio 8. Sea V un K -espacio vectorial, sea $f : V \rightarrow V$ una transformación lineal y sea $P \in K[X]$. Probar que:

- i) $\text{Nu}(P(f))$ e $\text{Im}(P(f))$ son subespacios invariantes por f .
- ii) Si un autovalor λ de f es raíz de P , entonces $E_\lambda \subseteq \text{Nu}(P(f))$.
- iii) Si un autovalor λ de f no es raíz de P , entonces $E_\lambda \subseteq \text{Im}(P(f))$.

Ejercicio 9. Sean A y $B \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$. Probar que A es semejante a B si y sólo si $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B$ y $m_A = m_B$. ¿Es válida esta afirmación en $\mathbb{C}^{3 \times 3}$? ¿Y en $\mathbb{C}^{4 \times 4}$?

Ejercicio 10. Hallar la forma y una base de Jordan de $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ en cada uno de los siguientes casos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 11. Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & a \\ 3 & -1 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- i) Para cada $a \in \mathbb{R}$, calcular \mathcal{X}_A , m_A y hallar la forma de Jordan de A .
- ii) Para $a = 2$, hallar una base de Jordan para A

Ejercicio 12. Sea $V \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$ el subespacio $V = \langle e^x, x.e^x, x^2.e^x, e^{2x} \rangle$. Sea $t : V \rightarrow V$ la transformación lineal definida por $t(f) = f'$. Hallar la forma y una base de Jordan para t .

Ejercicio 13. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$ las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Decidir si A y B son semejantes.

Ejercicio 14. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$ tales que $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B = (X - 1)^3.(X - 3)^2$ y $m_A = m_B$. Decidir si, necesariamente, A es semejante a B

Ejercicio 15. Encontrar todas las formas de Jordan posibles de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ en cada uno de los siguientes casos:

- i) $\mathcal{X}_A(X) = (X - 2)^4(X - 3)^2$; $m_A(X) = (X - 2)^2(X - 3)^2$
- ii) $\mathcal{X}_A(X) = (X - 7)^5$; $m_A(X) = (X - 7)^2$
- iii) $\mathcal{X}_A(X) = (X - 2)^7$; $m_A(X) = (X - 2)^3$
- iv) $\mathcal{X}_A(X) = (X - 3)^4(X - 5)^4$; $m_A(X) = (X - 3)^2(X - 5)^2$

Ejercicio 16. Hallar la forma de Jordan de una matriz $A \in \mathbb{C}^{15 \times 15}$ que tiene autovalores λ_1, λ_2 y λ_3 y cumple simultáneamente:

$$\begin{array}{lll} \text{rg}(A - \lambda_1 Id) = 13 & \text{rg}(A - \lambda_2 Id) = 13 & \text{rg}(A - \lambda_3 Id) = 13 \\ \text{rg}(A - \lambda_1 Id)^2 = 11 & \text{rg}(A - \lambda_2 Id)^2 = 11 & \text{rg}(A - \lambda_3 Id)^2 = 12 \\ \text{rg}(A - \lambda_1 Id)^3 = 10 & \text{rg}(A - \lambda_2 Id)^3 = 10 & \text{rg}(A - \lambda_3 Id)^3 = 11 \\ \text{rg}(A - \lambda_1 Id)^4 = 10 & \text{rg}(A - \lambda_2 Id)^4 = 9 & \end{array}$$

Ejercicio 17. Dar la forma de Jordan de una matriz $A \in \mathbb{C}^{14 \times 14}$ que verifica, simultáneamente: $m_A = (X - \lambda_1)^2.(X - \lambda_2).(X - \lambda_3)^2.(X - \lambda_4)^3$ (con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$) y

$$\begin{array}{lll} \text{rg}(A - \lambda_1.I) = 11 & \text{rg}(A - \lambda_3.I) = 12 & \text{rg}(A - \lambda_4.I) = 13 \\ \text{rg}(A - \lambda_1.I)^2 = 10 & \text{rg}(A - \lambda_3.I)^2 = 10 & \end{array}$$

Ejercicio 18. Hallar la forma de Jordan de la matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n+1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & n-2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 19. Sea $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Probar que A y A^t son semejantes.

Ejercicio 20. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, sea $J(\lambda, m) \in \mathbb{C}^{m \times m}$ la matriz

$$J(\lambda, m) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

i) Calcular $J(\lambda, m)^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Generalizar para cualquier potencia de una matriz formada por bloques de Jordan.

Sugerencia: Intentar calcular las primeras potencias y notar la aparición de ciertos números combinatorios.

ii) Calcular las formas de Jordan de las matrices $(J(\lambda, 3))^2$, $(J(\lambda, 3))^3$, $(J(\lambda, 4))^2$, $(J(\lambda, 4))^3$ y $(J(\lambda, 4))^4$.

Ejercicio 21. Sea $A \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$ una matriz tal que $m_A = X^6$ y sea $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ una base de Jordan para A . Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices A^2 , A^3 , A^4 y A^5 .

Ejercicio 22. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar $B \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ tal que $B^2 = A$.

Sugerencia: Calcular la forma de Jordan de A .

(*) **Ejercicio 23.** Sean $x, y \in \mathbb{C}^n$ y $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $A = (a_{ij})$ con $a_{ij} = x_i \cdot y_j$.

i) Calcular todos los autovalores y autovectores de A .

ii) Calcular la forma de Jordan de A .

(*) **Ejercicio 24.** Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se define la sucesión $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha, a_1 = \beta \\ a_{n+2} = 4 \cdot a_{n+1} - 4 \cdot a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Hallar una fórmula general para el término a_n , $\forall n \in \mathbb{N}_0$.

Sugerencia: Ver el razonamiento del ejercicio 8 de la práctica 6 e intentar modificarlo convenientemente utilizando el ejercicio 20 de esta práctica.