

## ÁLGEBRA LINEAL

### Práctica N°7: Forma de Jordan

**Ejercicio 1.** Dadas las matrices  $A$  y  $A'$  en  $K^{n \times n}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

- i) Probar que ambas son nilpotentes y que  $A$  es semejante a  $A'$ .
- ii) Dar bases  $B$  y  $B'$  de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$  tal que la matriz de la derivación en la base  $B$  sea  $A$  y en la base  $B'$  sea  $A'$ .
- iii) Sea  $B$  una base de  $K^n$  y sea  $f : K^n \rightarrow K^n$  tal que  $|f|_B = A$ . Probar que no existen subespacios propios  $f$ -invariantes  $S$  y  $T$  de  $K^n$  tales que  $K^n = S \oplus T$ .

**Ejercicio 2.** Sean  $A_i$  ( $1 \leq i \leq 6$ ) matrices en  $\mathbb{C}^{8 \times 8}$  nilpotentes tales que  $m_{A_i} = X^3$  ( $1 \leq i \leq 6$ ). ¿Es cierto que necesariamente dos de estas matrices son semejantes?

**Ejercicio 3.** Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz  $A \in \mathbb{C}^{9 \times 9}$ :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 4.** Sean  $A, B \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$  nilpotentes tales que  $m_A = m_B$  y  $\text{rg}(A) = \text{rg}(B)$ . Probar que  $A$  y  $B$  son semejantes. ¿Es cierto esto en  $\mathbb{C}^{7 \times 7}$ ?

**Ejercicio 5.** Hallar la forma y una base de Jordan de la matriz  $A = (a_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq j \\ 1 & \text{si } i > j \end{cases}$$

**Ejercicio 6.**

- i) Decidir si existe  $A \in \mathbb{C}^{8 \times 8}$  nilpotente tal que  $\text{rg}(A) = 6$ ,  $\text{rg}(A^2) = 4$ ,  $\text{rg}(A^3) = 3$ ,  $\text{rg}(A^4) = 1$  y  $\text{rg}(A^5) = 0$  simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.
- ii) Decidir si existe  $A \in \mathbb{R}^{16 \times 16}$  tal que  $m_A(X) = X^5$ ,  $\text{rg}(A) = 9$ ,  $\text{rg}(A^2) = 5$ ,  $\text{rg}(A^3) = 3$ ,  $\text{rg}(A^4) = 1$  y  $\text{rg}(A^5) = 0$  simultáneamente. En caso afirmativo, exhibir una.

**Ejercicio 7.** Sea  $f : \mathbb{C}^7 \rightarrow \mathbb{C}^7$  una transformación lineal y sea  $B$  una base de  $\mathbb{C}^7$  tal que

$$|f|_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- i) Hallar  $\mathcal{X}_f$  y  $m_f$ .
- ii) Sea  $\lambda$  un autovalor de  $f$  tal que  $\text{mult}(\lambda, \mathcal{X}_f) = m$ .  
Se definen  $E_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^7 / f(v) = \lambda \cdot v\}$  y  
 $V_\lambda = \{v \in \mathbb{C}^7 / (\lambda \cdot \text{Id} - f)^m(v) = 0\} = \text{Nu}((\lambda \cdot \text{Id} - f)^m)$   
¿Para qué autovalores  $\lambda$  de  $f$  se tiene que  $E_\lambda = V_\lambda$ ?
- iii) Para cada autovalor  $\lambda$  de  $f$ , ¿cuál es la menor potencia  $k$  tal que  $V_\lambda = \text{Nu}((\lambda \cdot \text{Id} - f)^k)$ ?
- iv) Si  $\lambda$  es un autovalor de  $f$ , se nota  $f_\lambda$  a la restricción de  $f$  a  $V_\lambda$ .  
Calcular  $\dim(\text{Im}(f_\lambda))$  y  $\dim(\text{Im}(f_\lambda^2))$  para cada  $\lambda$ .

**Ejercicio 8.** Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial, sea  $f : V \rightarrow V$  una transformación lineal y sea  $P \in K[X]$ . Probar que:

- i)  $\text{Nu}(P(f))$  e  $\text{Im}(P(f))$  son subespacios invariantes por  $f$ .
- ii) Si un autovalor  $\lambda$  de  $f$  es raíz de  $P$ , entonces  $E_\lambda \subseteq \text{Nu}(P(f))$ .
- iii) Si un autovalor  $\lambda$  de  $f$  no es raíz de  $P$ , entonces  $E_\lambda \subseteq \text{Im}(P(f))$ .

**Ejercicio 9.** Sean  $A$  y  $B \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ . Probar que  $A$  es semejante a  $B$  si y sólo si  $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B$  y  $m_A = m_B$ . ¿Es válida esta afirmación en  $\mathbb{C}^{3 \times 3}$ ? ¿Y en  $\mathbb{C}^{4 \times 4}$ ?

**Ejercicio 10.** Hallar la forma y una base de Jordan de  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  en cada uno de los siguientes casos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -17 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 11.** Sea  $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$  la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 & a \\ 3 & -1 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- i) Para cada  $a \in \mathbb{R}$ , calcular  $\mathcal{X}_A$ ,  $m_A$  y hallar la forma de Jordan de  $A$ .
- ii) Para  $a = 2$ , hallar una base de Jordan para  $A$

**Ejercicio 12.** Sea  $V \subseteq C^\infty(\mathbb{R})$  el subespacio  $V = \langle e^x, x.e^x, x^2.e^x, e^{2x} \rangle$ . Sea  $t : V \rightarrow V$  la transformación lineal definida por  $t(f) = f'$ . Hallar la forma y una base de Jordan para  $t$ .

**Ejercicio 13.** Sean  $A, B \in \mathbb{C}^{4 \times 4}$  las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Decidir si  $A$  y  $B$  son semejantes.

**Ejercicio 14.** Sean  $A, B \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$  tales que  $\mathcal{X}_A = \mathcal{X}_B = (X - 1)^3.(X - 3)^2$  y  $m_A = m_B$ . Decidir si, necesariamente,  $A$  es semejante a  $B$

**Ejercicio 15.** Encontrar todas las formas de Jordan posibles de la matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  en cada uno de los siguientes casos:

- i)  $\mathcal{X}_A(X) = (X - 2)^4(X - 3)^2; \quad m_A(X) = (X - 2)^2(X - 3)^2$
- ii)  $\mathcal{X}_A(X) = (X - 7)^5; \quad m_A(X) = (X - 7)^2$
- iii)  $\mathcal{X}_A(X) = (X - 2)^7; \quad m_A(X) = (X - 2)^3$
- iv)  $\mathcal{X}_A(X) = (X - 3)^4(X - 5)^4; \quad m_A(X) = (X - 3)^2(X - 5)^2$

**Ejercicio 16.** Hallar la forma de Jordan de una matriz  $A \in \mathbb{C}^{15 \times 15}$  que tiene autovalores  $\lambda_1, \lambda_2$  y  $\lambda_3$  y cumple simultáneamente:

$$\begin{array}{lll} \text{rg}(A - \lambda_1 Id) = 13 & \text{rg}(A - \lambda_2 Id) = 13 & \text{rg}(A - \lambda_3 Id) = 13 \\ \text{rg}(A - \lambda_1 Id)^2 = 11 & \text{rg}(A - \lambda_2 Id)^2 = 11 & \text{rg}(A - \lambda_3 Id)^2 = 12 \\ \text{rg}(A - \lambda_1 Id)^3 = 10 & \text{rg}(A - \lambda_2 Id)^3 = 10 & \text{rg}(A - \lambda_3 Id)^3 = 11 \\ \text{rg}(A - \lambda_1 Id)^4 = 10 & \text{rg}(A - \lambda_2 Id)^4 = 9 & \end{array}$$

**Ejercicio 17.** Dar la forma de Jordan de una matriz  $A \in \mathbb{C}^{14 \times 14}$  que verifica, simultáneamente:  $m_A = (X - \lambda_1)^2.(X - \lambda_2).(X - \lambda_3)^2.(X - \lambda_4)^3$  (con  $\lambda_i \neq \lambda_j$  si  $i \neq j$ ) y

$$\begin{array}{lll} \text{rg}(A - \lambda_1.I) = 11 & \text{rg}(A - \lambda_3.I) = 12 & \text{rg}(A - \lambda_4.I) = 13 \\ \text{rg}(A - \lambda_1.I)^2 = 10 & \text{rg}(A - \lambda_3.I)^2 = 10 & \end{array}$$

**Ejercicio 18.** Hallar la forma de Jordan de la matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & n+1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \dots & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \dots & n-2 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix}$$

**Ejercicio 19.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Probar que  $A$  y  $A^t$  son semejantes.

**Ejercicio 20.** Si  $\lambda \in \mathbb{C}$ , sea  $J(\lambda, m) \in \mathbb{C}^{m \times m}$  la matriz

$$J(\lambda, m) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

i) Calcular  $J(\lambda, m)^k$  para todo  $k \in \mathbb{N}$ . Generalizar para cualquier potencia de una matriz formada por bloques de Jordan.

Sugerencia: Intentar calcular las primeras potencias y notar la aparición de ciertos números combinatorios.

ii) Calcular las formas de Jordan de las matrices  $(J(\lambda, 3))^2$ ,  $(J(\lambda, 3))^3$ ,  $(J(\lambda, 4))^2$ ,  $(J(\lambda, 4))^3$  y  $(J(\lambda, 4))^4$ .

**Ejercicio 21.** Sea  $A \in \mathbb{C}^{6 \times 6}$  una matriz tal que  $m_A = X^6$  y sea  $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  una base de Jordan para  $A$ . Calcular la forma y una base de Jordan para las matrices  $A^2$ ,  $A^3$ ,  $A^4$  y  $A^5$ .

**Ejercicio 22.** Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ , encontrar  $B \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$  tal que  $B^2 = A$ .

Sugerencia: Calcular la forma de Jordan de  $A$ .

(\*) **Ejercicio 23.** Sean  $x, y \in \mathbb{C}^n$  y  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $A = (a_{ij})$  con  $a_{ij} = x_i \cdot y_j$ .

i) Calcular todos los autovalores y autovectores de  $A$ .

ii) Calcular la forma de Jordan de  $A$ .

(\*) **Ejercicio 24.** Sean  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Se define la sucesión  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  de la siguiente manera:

$$\begin{cases} a_0 = \alpha, a_1 = \beta \\ a_{n+2} = 4 \cdot a_{n+1} - 4 \cdot a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \end{cases}$$

Hallar una fórmula general para el término  $a_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}_0$ .

Sugerencia: Ver el razonamiento del ejercicio 8 de la práctica 6 e intentar modificarlo convenientemente utilizando el ejercicio 20 de esta práctica.