ÁLGEBRA LINEAL

Práctica N°8: Variedades Lineales

Ejercicio 1. Sea V un K-espacio vectorial y sean $P\,,\,Q\,\in\,V$; $P\neq Q$. Sea $S=<Q-P>$ y sea $M=S+P$. Probar la validez de las siguientes afirmaciones:

i) P y Q están en M.

ii) $M=S+Q$

iii) Si $M'\subseteq V$ es una variedad lineal tal que $P\,,\,Q\in M'$ entonces $M\subseteq M'$.

iv) $M=\{\lambda.Q+\mu.P\,/\,\lambda\,,\,\mu\in K\,;\,\lambda+\mu=1\}$

Ejercicio 2. Probar que cada uno de los siguientes conjuntos son variedades lineales y calcular su dimensión:

i) $M_1=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\,/\,2.x_1-x_3=1\quad\text{y}\quad x_2+x_3=-2\}$

ii) $M_2=\{(1,2,3)\}\subseteq\mathbb{R}^3$

iii) $M_3=\{P\in\mathbb{Q}_3[X]\,/\,P'(2)=0\}$

iv) $M_4=\{A\in\mathbb{C}^{2\times2}\,/\,tr(A)=5\}$

Ejercicio 3.

i) Sea $L\subseteq\mathbb{R}^3$ la recta que pasa por los puntos $(2,-1,0)$ y $(1,3,-1)$. Hallar una variedad lineal M de dimensión 2 que contenga a L. ¿Es M única?

ii) Sea $\Pi=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\,/\,2.x_1-x_2+x_3=1\}$ y sea $L=<(0,1,1)>+(1,1,0)$. Hallar una variedad lineal $M\subseteq\mathbb{R}^3$ de dimensión 2 tal que $M\cap\Pi=L$.

Ejercicio 4. Para los distintos valores de $a\in\mathbb{R}$, determinar la dimensión de la variedad lineal

$$M=\Big\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3/x_1-x_2+3.x_3=0\,,\,2.x_1+x_2+x_3=1\,,\,-x_1+x_2+a.x_3=0\Big\}$$

Ejercicio 5. Hallar ecuaciones implícitas para las siguientes variedades lineales:

i) $M=<(1,2,1),(2,0,1)>+(1,1,1)\subseteq\mathbb{R}^3$.

ii) $M\subseteq\mathbb{R}^4$ la mínima variedad que contiene a $(1,1,2,0)\,,\,(2,1,1,0)$ y $(-1,0,4,1)$.

Ejercicio 6.

i) Sea $A\in K^{m\times n}$ y sea $b\in K^m$ tal que $\mathrm{rg}(A|b)=\mathrm{rg}(A)$. Probar que las soluciones de la ecuación $A.x=b$ forman una variedad lineal y calcular su dimensión. ¿Qué pasa si $\mathrm{rg}(A)\neq\mathrm{rg}(A|b)$?

ii) Sea $M\subseteq K^n$ una variedad lineal. Probar que existe $A\in K^{m\times n}$ y $b\in K^m$ para algún m conveniente tal que $M=\{x\in K^n/A.x=b\}$.

iii) Sea V un K-espacio vectorial de dimensión finita, B una base de V y $M \subseteq V$ una variedad lineal. Deducir de ii) que las coordenadas de los elementos de M en la base B son exactamente las soluciones de algún sistema lineal de ecuaciones.

Ejercicio 7. Sea $L = <(2,1,1)> + (0,-1,1) \subseteq \mathbb{R}^3$.

i) Hallar un plano P tal que $0 \in P$ y $L \subseteq P$.

ii) ¿Existirá un plano P' tal que $L \subseteq P'$, $0 \in P'$ y $(0,0,1) \in P'$ simultáneamente?

Ejercicio 8.

i) Encontrar dos rectas alabeadas en $\mathbb{R}^3$ que pasen por $(1,2,1)$ y $(2,1,1)$ respectivamente.

ii) Encontrar dos planos alabeados en $\mathbb{R}^4$ que pasen por $(1,1,1,0)$ y $(0,1,1,1)$ respectivamente.

iii) ¿Hay planos alabeados en $\mathbb{R}^3$? Más generalmente, si V es un K-espacio vectorial de dimensión n y M_1 y M_2 son variedades lineales alabeadas en V ¿qué se puede decir de sus dimensiones?

Ejercicio 9.

i) Sea $S = <(2,-3)> \subseteq \mathbb{R}^2$. Hallar una recta $L \parallel S$ tal que $(1,-1) \in L$. Graficar.

ii) Sea $L_1 = <(2,1,0)> + (0,0,1)$. Hallar una recta $L_2 \parallel L_1$ que pase por el punto $(-1,3,0)$.

iii) Si L_1 y L_2 son las variedades de ii), hallar un plano $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $L_1 \subseteq \Pi$ y $L_2 \subseteq \Pi$ simultáneamente. ¿Es Π único?

iv) Con las notaciones anteriores, hallar un plano $\Pi' \subseteq \mathbb{R}^3$ tal que $\Pi \cap \Pi' = L_1$.

Ejercicio 10. En cada uno de los siguientes casos, decidir si las variedades lineales M_1 y M_2 se cortan, son paralelas o alabeadas. En cada caso, hallar $M_1 \cap M_2$, $M_1 \vee M_2$ y calcular todas las dimensiones:

i) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 - x_3 = 1\}$
$M_2 = <(1,0,1)> + (0,0,-3)$

ii) $M_1 = <(1,2,1,0), (1,0,0,1)> + (1,2,2,-1)$
$M_2 = <(1,0,1,1), (2,2,1,0)> + (-1,4,2,-3)$

iii) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 - 1 = x_3 + x_4 = 0\}$
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 / x_1 - x_2 = x_2 + x_3 + x_4 - 1 = 0\}$

Ejercicio 11. Sean $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 - x_3 = x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$ y $M_2 = <(1,1,1)> + (0,2,0)$.

i) Hallar planos P_1 y P_2 de $\mathbb{R}^3$ tales que $M_1 \subseteq P_1$, $M_2 \subseteq P_2$ y $P_1 \parallel P_2$ simultáneamente.

ii) Hallar $M_1 \cap M_2$ y $M_1 \vee M_2$ y calcular sus dimensiones.

Ejercicio 12. Sean L_1 y L_2 las rectas dadas por $L_1 = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 - 3.x_3 = 0\,,\, x_2 - x_3 = -2\}$ y $L_2 = \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 - 6.x_3 = 1\,,\, x_2 + 2.x_3 = 0\}$.
Hallar una recta $L \subseteq \mathbb{R}^3$ que pase por el punto $(1,0,2)$ y corte simultneamente a L_1 y a L_2.