ÁLGEBRA LINEAL

Práctica N°9: Espacios vectoriales con producto interno

En esta práctica, todos los espacios vectoriales serán sobre $\mathbb{R}$ o sobre $\mathbb{C}$ únicamente.

Notación: Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times m}$. $A^* \in \mathbb{C}^{m\times n}$ denota la matriz transpuesta conjugada de A cuyos coeficientes satisfacen $(A^*)_{ij} = \overline{A_{ji}}$.

Ejercicio 1. Sea V un espacio vectorial y sea $\langle , \rangle$ un producto interno sobre V. Probar:

i) $\langle x,\, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$

ii) $\langle x,\, cy\rangle = \bar{c}\,.\,\langle x, y\rangle$

iii) $\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle\ \forall\, x \in V \ \Rightarrow\ y = z$

Ejercicio 2. Sea $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio vectorial con producto interno.
Probar que $|\langle x, y\rangle| = ||x||.||y||$ si y sólo si $\{x, y\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

Ejercicio 3. Sea V un espacio vectorial. Demostrar que la suma de dos productos internos sobre V es un producto interno sobre V.

Ejercicio 4. Sea V un espacio vectorial con producto interno. Se define la distancia entre dos vectores $x, y \in V$ como $d(x, y) = ||x - y||$. Demostrar que:

i) $d(x, y) \geq 0$

ii) $d(x, y) = 0 \iff x = y$

iii) $d(x, y) = d(y, x)$

iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Ejercicio 5. Determinar si las siguientes funciones son o no productos internos. En caso afirmativo encontrar su matriz en la base canónica del espacio correspondiente.

i) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;
$\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + 3.x_2.y_1 - x_2.y_2 + 3.x_1.y_2$

ii) $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$;
$\Phi(x, y) = x_1.y_1 + x_2.y_1 + 2.x_2.y_2 - 3.x_1.y_2$

iii) $\Phi : K^2 \times K^2 \to K$;
$\Phi(x, y) = 2.x_1.y_1 + x_2.y_2 - x_1.y_2 - x_2.y_1$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

iv) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$;
$\Phi(x, y) = 2.x_1.\overline{y}_1 + x_2.\overline{y}_2 - x_1.\overline{y}_2 - x_2.\overline{y}_1$

v) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$;
$\Phi(x, y) = 2.x_1.\overline{y}_1 + (1 + i).x_1.\overline{y}_2 + (1 + i).x_2.\overline{y}_1 + 3.x_2.\overline{y}_2$

vi) $\Phi : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$;

$\Phi(x, y) = x_1.\overline{y}_1 - i.x_1\overline{y}_2 + i.x_2\overline{y}_1 + 2.x_2.\overline{y}_2$

vii) $\Phi : K^3 \times K^3 \to K$;

$\Phi(x, y) = 2.x_1.\overline{y}_1 + x_3.\overline{y}_3 - x_1.\overline{y}_3 - x_3.\overline{y}_1$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

viii) $\Phi : K^3 \times K^3 \to K$;

$\Phi(x, y) = 3.x_1.\overline{y}_1 + x_2.\overline{y}_1 + 2.x_2.\overline{y}_2 + x_1.\overline{y}_2 + x_3.\overline{y}_3$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

Ejercicio 6.

i) Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi(x, y) = x_1.y_1 - 2.x_1.y_2 - 2.x_2.y_1 + 6.x_2.y_2$$

a) Probar que Φ es un producto interno.

b) Encontrar una base de $\mathbb{R}^2$ que sea ortonormal para Φ.

ii) Encontrar una base de $\mathbb{C}^2$ que sea ortonormal para el producto interno definido en el Ejercicio 1. vi).

Ejercicio 7. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de V.

i) Probar que existe un único producto interno en V para el cual B resulta ortonormal.

ii) Hallarlo en los casos

a) $V = \mathbb{R}^2$ y $B = \{(1, 1), (2, -1)\}$

b) $V = \mathbb{C}^2$ y $B = \{(1, i), (-1, i)\}$

c) $V = \mathbb{R}^3$ y $B = \{(1, -1, 1), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$

d) $V = \mathbb{C}^3$ y $B = \{(1, i, 1), (0, 0, 1), (0, 1, i)\}$

Ejercicio 8. Sea $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Sea $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Phi(x, y) = y.A.x^t.$$

Probar que Φ es un producto interno sobre $\mathbb{R}^2$ si y sólo si $A = A^t$, $A_{11} > 0$ y $\det(A) > 0$.

Ejercicio 9. Determinar para qué valores de a y b en $\mathbb{R}$ es

$$\Phi(x, y) = a.x_1.y_1 + b.x_1.y_2 + b.x_2.y_1 + b.x_2.y_2 + (1 + b).x_3.y_3$$

un producto interno en $\mathbb{R}^3$.

Ejercicio 10. Probar que las siguientes funciones definen productos internos sobre los espacios vectoriales considerados:

i) $\langle , \rangle : K^{n\times n} \times K^{n\times n} \to K$

$\langle A, B\rangle = tr(A.B^*)$, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

ii) $\langle , \rangle : C[0, 1] \times C[0, 1] \to \mathbb{R}$ $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(x).g(x)\, dx$

iii) $\langle , \rangle : K^n \times K^n \to K$ $\langle x, y\rangle = \overline{y}.\, Q^*.Q.\, x^t$

donde $Q \in K^{n\times n}$ es una matriz inversible, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

iv) $\langle , \rangle_T : V \times V \to K \ \langle x, y\rangle_T = \langle T(x), T(y)\rangle$

donde V y W son espacios vectoriales sobre K, $\langle , \rangle$ es un producto interno sobre W y $T : V \to W$ es un monomorfismo, con $K = \mathbb{R}$ y $K = \mathbb{C}$

Ejercicio 11. Restringir el producto interno del item ii) del ejercicio anterior a $\mathbb{R}_n[X]$ y calcular su matriz en la base $B = \{1, X, \dots, X^n\}$.

Ejercicio 12. Hallar el complemento ortogonal de los siguientes subespacios de V:

i) $V = \mathbb{R}^3$, $\quad S_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_2 = 0\}$
para el producto interno canónico.

ii) $V = \mathbb{R}^3$, $\quad S_2 =< (1, 2, 1) >$

a) Para el producto interno canónico.

b) Para el producto interno definido por

$$\langle x, y\rangle = x_1.y_1 + 2.x_2.y_2 + x_3.y_3 - x_1.y_2 - x_2.y_1.$$

iii) $V = \mathbb{C}^3$, $\quad S_3 =< (i, 1, 1), (-1, 0, i) >$

a) Para el producto interno $\langle , \rangle_T$ definido en el ejercicio 10. iv) con

$$T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3; \qquad T(x) = \begin{pmatrix} i & -1+i & 0 \\ 1 & i & 0 \\ 1 & i+1 & i \end{pmatrix} . x^t$$

b) Para $\langle , \rangle$ el producto interno canónico sobre $\mathbb{C}^3$

iv) $V = \mathbb{C}^4$, $\quad S_4 = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{C}^4 \,/\, \begin{cases} x_1 + 2i.x_2 - x_3 + (1+i).x_4 = 0 \\ x_2 + (2-i).x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \right\}$

para el producto interno $\langle x, y\rangle = x_1.\overline{y}_1 + 2.x_2.\overline{y}_2 + x_3.\overline{y}_3 + 3.x_4.\overline{y}_4$.

v) $V = \mathbb{R}^4$, $\quad S_5 =< (1, 1, 0, -1), (-1, 1, 1, 0), (2, -1, 1, 1) >$
para el producto interno canónico.

Ejercicio 13.

i) Hallar bases ortonormales para los subespacios del ejercicio anterior para cada uno de los productos internos considerados.

ii) Definir explícitamente las proyecciones ortogonales sobre cada uno de dichos subespacios.

iii) Hallar el punto de S_5 más cercano a $(0, 1, 1, 0)$.

Ejercicio 14. Sean S_1 , S_2 y S_3 los subespacios de $\mathbb{R}^4$

$$S_1 : \begin{cases} x_1 + x_2 - 2.x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_2 - x_4 = 0 \end{cases} \qquad S_2 : \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2.x_1 + 2.x_4 = 0 \end{cases} \qquad S_3 : \{2.x_1 + x_2 + 2.x_3 = 0$$

Encontrar una base ortonormal $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ de $\mathbb{R}^4$ tal que $v_i \in S_i$ $(i = 1, 2, 3)$.
¿Por qué este problema tiene solución?

Ejercicio 15. Se define $\langle , \rangle : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ como

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n}).g(\frac{k}{n})$$

i) Probar que $\langle , \rangle$ es un producto interno.

ii) Para $n = 2$, calcular $< X >^{\perp}$.

Ejercicio 16.

i) Se considera $\mathbb{C}^{n\times n}$ con el producto interno $\langle A, B \rangle = tr(A.B^*)$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio de las matrices diagonales.

ii) Se considera $\mathbb{R}_3[X]$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)dx$. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $\{1, X, X^2, X^3\}$. Hallar el complemento ortogonal del subespacio $S =< 1 >$.

iii) Se considera $C[-1, 1]$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x).g(x)dx$. Hallar el polinomio de grado menor o igual que 3 más próximo a la función $f(x) = \mathrm{sen}(\pi x)$.

Sugerencia: Observar que basta considerar el subespacio $S =< 1, x, x^2, x^3, \mathrm{sen}(\pi x) >$.

iv) Se considera $C[0, \pi]$ con el producto interno $\langle f, g \rangle = \int_{0}^{\pi} f(t).g(t)dt$.

a) Aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base $B = \{1, \cos t, \mathrm{sen}\, t\}$.

b) Sea S el subespacio de $C[0, \pi]$ generado por B. Hallar el elemento de S más próximo a la función $f(x) = x$.

Ejercicio 17. Sea V un espacio vectorial con producto interno $\langle , \rangle$. Sea $W \subseteq V$ un subespacio de dimensión finita de V. Probar que si $x \notin W$, entonces existe $y \in V$ tal que $y \in W^{\perp}$ y $\langle x, y \rangle \neq 0$.

Variedades lineales en espacios euclídeos

Ejercicio 18. Sea $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la proyección ortogonal, para el producto interno canónico, sobre el subespacio $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_2 = 0\}$.

i) Encontrar una recta $L \subset \mathbb{R}^3$ tal que $P(L) = (1, 2, 1)$. ¿Es única?

ii) Encontrar una recta $L_1 \subset \mathbb{R}^3$ tal que $P(L_1) = L_2$ siendo $L_2 : \begin{cases} 2.x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$

¿Es única?

Ejercicio 19. Sean $A = (1, 1, 2)$ y $B = (2, 0, 2)$. Sea $\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 = 2\}$. Hallar $C \in \Pi$ tal que A, B y C formen un triángulo equilátero. ¿La solución es única?

Definición: un **paralelogramo** es un cuadrilátero tal que sus lados opuestos son paralelos.

Ejercicio 20.

i) Probar que si el cuadrilátero dado en $\mathbb{R}^2$ por los puntos $(0,0)$, (a,b) , (c,d) y $(e,0)$ es un paralelogramo, el punto de intersección de sus diagonales es el punto medio de cada una de ellas.

ii) Bajo las mismas hipótesis de i), probar que si las diagonales son perpendiculares, los cuatro lados son iguales.

Ejercicio 21. Sean A_1 , A_2 y A_3 en $\mathbb{R}^3$ tres puntos no alineados y sea S el conjunto

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 \,/\, \mathrm{d}(x, A_1) = \mathrm{d}(x, A_2) = \mathrm{d}(x, A_3)\}$$

i) Probar que S es una recta ortogonal al plano que contiene a A_1, A_2 y A_3.

ii) Calcular S para $A_1 = (1, -1, 0)$, $A_2 = (0, 1, 1)$ y $A_3 = (1, 1, 2)$.

Ejercicio 22. Hallar en $\mathbb{R}^n$ el complemento ortogonal a M que pasa por A, la proyección ortogonal de A sobre M y $\mathrm{d}(A, M)$ en los siguientes casos:

i) $n = 2 \quad , \quad M : x_1 - x_2 = 2 \quad , \quad A = (2, 3).$

ii) $n = 3 \quad , \quad M : \begin{cases} 3.x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases} \quad , \quad A = (1, 0, 0).$

iii) $n = 4 \quad , \quad M : \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 2.x_1 - 3.x_4 = 2 \end{cases} \quad , \quad A = (0, 2, 0, -1).$

Ejercicio 23. Dado en $\mathbb{R}^2$ el triángulo de vértices $A = (2, -3)$, $B = (8, 5)$ y $C = (14, 11)$, hallar la longitud de la altura que pasa por el vértice A.

Ejercicio 24. Se consideran en $\mathbb{R}^2$ los puntos $O = (0,0)$, $P = (a,b)$ y $Q = (c,d)$. Dichos puntos forman un triángulo isósceles con base $\overline{PQ}$. Probar que la altura correspondiente a la base corta a ésta en su punto medio.

Ejercicio 25. Sean en $\mathbb{R}^3$ los puntos $A_1 = (1, -1, 0)$ y $A_2 = (1, 1, 1)$. Encontrar tres hiperplanos H tales que $\mathrm{d}(A_1, H) = \mathrm{d}(A_2, H)$.

Ejercicio 26.

i) Calcular el ángulo entre las rectas de $\mathbb{R}^2$

$$L_1 : x_1 - x_2 = 1 \qquad \text{y} \qquad L_2 : x_1 + x_2 = 3.$$

ii) Hallar una recta L_3 tal que $Ang\,(L_1, L_2) = Ang\,(L_2, L_3)$ y $L_1 \cap L_2 \in L_3$.

Ejercicio 27. Sea $L \subset \mathbb{R}^3$ la recta $L = < (1, -1, 1) > + (2, 1, 0)$. Encontrar un plano $P \subset \mathbb{R}^3$ tal que $(2, 1, 0) \in P$ y $Ang\,(L, P) = \frac{\pi}{4}$.

Ejercicio 28. Sean M_1 y M_2 variedades lineales de $\mathbb{R}^n$, $A \in M_1$, $B \in M_2$ y S_1, S_2 los subespacios de $\mathbb{R}^n$ asociados a M_1 y a M_2. Si $S = S_1 + S_2$ probar

i) Si $A - B = v + u$ con $v \in S$ y $u \in S^{\perp}$, entonces u no depende de la elección de $A \in M_1$ ni de la elección de $B \in M_2$.

ii) Si $x \in M_1$ e $y \in M_2$, entonces $\mathrm{d}(x, y) \geq \| u \|$

iii) En la situación de i), sea $v = v_1 + v_2$ con $v_1 \in S_1$ y $v_2 \in S_2$. Si $P = A + (-v_1)$ y $Q = B + v_2$, entonces $P \in M_1$, $Q \in M_2$ y $\mathrm{d}(x, y) \geq \mathrm{d}(P, Q) =$. Luego $\| u \| = \mathrm{d}(M_1, M_2)$.

Ejercicio 29. Hallar la distancia entre M_1 y M_2 en los siguientes casos:

i) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - 2.x_2 + x_3 = 1\}$
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 - 2.x_2 + x_3 = 3\}$

ii) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 = 1\,,\, x_1 - x_3 = 0\}$
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\,,\, x_3 = 1\}$

iii) $M_1 =< (1, -1, 0), (2, 1, 1) > +(1, 0, 0)$
$M_2 = \{(3, 0, 1)\}$

iv) $M_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 - x_2 + x_3 = -2\,;\, x_2 - 2.x_4 = 2\}$
$M_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0\,;\, x_2 - 2.x_4 = -8\,;\, x_1 - x_2 + x_4 = 5\}$

Ejercicio 30. Utilizando el ejercicio 28, demostrar que si M_1 y M_2 son variedades lineales de $\mathbb{R}^n$ con $\dim M_1 \leq \dim M_2$ y $M_1 \parallel M_2$, entonces $\mathrm{d}(M_1, M_2) = \mathrm{d}(P, M_2)$ para todo $P \in M_1$.

Ejercicio 31. Sea en $\mathbb{R}^2$ la recta L que pasa por los puntos $(2, -1)$ y $(5, 3)$. Determinar una recta $L' \parallel L$ tal que $\mathrm{d}(L, L') = 2$.

Ejercicio 32. Sean en $\mathbb{R}^3$ la recta $L =< (1, 1, 2) >$ y el punto $P = (1, 0, -2)$. Encontrar un plano H ortogonal a L tal que $\mathrm{d}(P, H) = \sqrt{6}$.

Ejercicio 33. Sean en $\mathbb{R}^3$ la recta $L =< (1, 2, -2) > +(0, 2, 0)$ y el punto $P = (1, 2, 2)$. Encontrar ecuaciones implícitas de una recta L' ortogonal a L tal que $\mathrm{d}(P, L') = 3$ y $L \cap L' = \emptyset$. ¿Es única?

Ejercicio 34. Sean $P_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,/\, 2.x_1 - x_2 + x_3 = 1\}$ y $P_2 = (1, 1, 1)+$
$+ < (0, 1, 1), (1, 0, -2) >$. Hallar un plano H tal que $P_i \parallel H \quad (i = 1, 2)$ y $\mathrm{d}(P_1, H) = \mathrm{d}(P_2, H)$.

Ejercicio 35. Sea $L =< (3, 0, -4) > +(1, -1, 0)$. Encontrar una recta L' alabeada con L, tal que $\mathrm{d}(L, L') = 2$.