

ANÁLISIS I

Práctica 1

1. Representar los siguientes conjuntos en \mathbb{R}

(a) $\{x : |x - 1| < 1, x \notin \mathbb{Z}\}$

(b) $\{x : |x - 3| < |2 - x|\}$

(c) $\{x : 0 < x^2 \leq x^3\}$

2.

(a) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados superiormente

i. $\mathbb{R}_{>0}$

ii. $\{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} \text{ con } n = m^2\}$

(b) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados inferiormente

i. \mathbb{Z}

ii. $\{x^{-1} : x < 0\}$

iii. $\text{Im}(f)$ donde $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

3. Calcular supremo, ínfimo, máximos y mínimo (si existen) y probar que lo son, de los siguientes conjuntos:

(a) $\{n \in \mathbb{N} : 20 < n \leq 35\}$

(b) $\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

(c) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

(d) $\{\frac{2n}{7n-3} : n \in \mathbb{N}\}$

4.

- (a) Probar que el conjunto $A = \{a \in \mathbb{Q}/a^2 < 2\}$ no tiene supremo en \mathbb{Q} .
- (b) Probar que el conjunto $B = \{a \in \mathbb{Q}/a^2 > 2\}$ no tiene ínfimo en \mathbb{Q} .

Sugerencia: dado $a \in A$ mostrar explícitamente un elemento mayor en A (análogamente para el ítem b).

5. Sean $A = [2, 5]$ y $B = (3, 6)$. Calcular supremo, ínfimo, máximo y mínimo (si existen) de:

- (a) $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$
- (b) $A \cdot B = \{a \cdot b : a \in A, b \in B\}$
- (c) $A \setminus B$

6. Estudiar los extremos de los siguientes conjuntos y representarlos en la recta real:

- (a) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x + 3| + |x - 9| > 2\}$
- (b) $B = \{x \in \mathbb{R} : ||x + 2| - |x - 1|| < 1\}$
- (c) $C = \{x \in \mathbb{R} : |x^3 - 1| + |2 - x^3| = 1\}$

7. Estudiar los extremos (en función de a y de b) de $\{x \in \mathbb{R} : |x - a| > |x - b|\}$.

8. Hallar

- (a) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{n^2}{2^n} \right\}$
- (b) $\sup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{\sqrt{n+1}}{10+n} \right\}$
- (c) $\inf_{n \in \mathbb{N}} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$
- (d) $\inf_{n \in \mathbb{N}} \{n^2 - 9n - 10\}$

9. Resolver:

- (a) $|x + 3| < 1$

- (b) $|x - 3| \geq 10$
- (c) $|x| > |x + 3|$
- (d) $|3x - 1| < |x - 1|$
- (e) $\left| \frac{x-2}{3x+1} \right| \leq 1$

10. Sea $a \geq 0$. Para qué valores de b se verifica que:

- (a) $|a + b| = |a| + |b|$
- (b) $|a + b| < |a| + |b|$
- (c) $|a - b| = |a| + |b|$
- (d) $|a - b| < |a| + |b|$
- (e) $||a| - |b|| = |a - b|$
- (f) $||a| - |b|| < |a - b|$

11. Sean $0 \leq x \leq y$. Probar que $x \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq y$.

12. Mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ y determinar para cada $\varepsilon > 0$ un valor $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que $\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < \varepsilon$ si $n > n_0$. Completar la siguiente tabla:

ε	0, 1	0, 001	0, 00001	10^{-6}
n_0				

13. Demostrar por definición los siguientes límites:

- (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n^2+3n-2)-3}{n} = 0$
- (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+1}{n^2-n+4} = 1$
- (c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n}{2n+5} = \frac{3}{2}$
- (d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - \sin(n)}{n^2 + \cos(n)} = 1$

14. Sean $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ y $g(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$ polinomios de grado n y m respectivamente. Suponer que $a_n, b_m > 0$ e investigar el límite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(k)}{g(k)}$$

para los casos $n > m, n = m, n < m$.

15. Calcular:

- (a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k \sin(n!)}{n+1}$ ($0 \leq k < 1$)
- (b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right)$
- (c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{4}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right)$

16. Estudiar la convergencia de

- (a) $x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$
- (b) $x_n = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdots \frac{n+1}{2n-1}$

17. Sean $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de números positivos que verifica $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n}$

- (a) Probar que $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente.
- (b) Probar que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = +\infty$.

18. La sucesión de Fibonacci, se define como:

$$F_1 = F_2 = 1 \text{ y } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Probar que $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = +\infty$.

19. Sea $a_{n+1} = \frac{2}{a_n}$, $a_1 = \alpha \neq 0$. ¿Para qué valores de α es a_n convergente?

20. Demostrar que la convergencia de una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ implica la de $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$. ¿Vale la recíproca?

21.

- (a) Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{r}$ con r número real positivos sin usar ningún criterio de convergencia.
- (b) Calcular $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ con r número real sin usar ningún criterio de convergencia.

22.

- (a) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$ tal que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Probar que:

- i. Si $l < 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.
 - ii. Si $l > 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$.
 - iii. Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.
- (b) Calcular, usando el ejercicio anterior, el límite de las siguientes sucesiones:
- i. $a_n = \sqrt[n]{n}$
 - ii. $a_n = \sqrt[n]{n!}$
 - iii. $a_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}$
- (c) Comprobar que puede existir $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ ($a_n > 0$) y no existir $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (Sugerencia: considerar $a_n = 2 + (-1)^n$).

23. Probar que para $|x| < 1$ la sucesión

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n$$

tiende a cero cuando n tiende a infinito, cualquiera sea el número real α .

24. Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

- (a) $\frac{(n+3)! - n!}{(n+4)!}$
- (b) $\frac{n^4 - n + 2^n n}{(n^3 - 1)2^n}$
- (c) $\frac{8^n - 4^n}{3^n}$
- (d) $\frac{\sqrt[n]{1+2^n+\dots+n^n}}{n}$
- (e) $\sqrt[n]{n^2 + n}$
- (f) $\frac{\cos(n\pi/2)}{n^2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})}$
- (g) $\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}$
- (h) $\frac{n}{e^n}$
- (i) $\frac{\ln(n)}{n}$
- (j) $\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^n$

25. Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

- (a) $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$
- (b) $\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{\frac{n^2+4}{n+1}}$
- (c) $\left(\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}-5}\right)^{\sin(n)}$
- (d) $(n^4 + n)^{1/n^5}$
- (e) $n^{\frac{\sin(n)}{n}}$
- (f) $\sqrt{n}^{1/\sqrt{n}}$

26. Escribir los primeros tres términos de las series dadas por los siguientes términos generales:

- (a) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$
- (b) $u_n = \frac{n^3}{n+1}$
- (c) $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
- (d) $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

27. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n-1}{2n^2+3}$
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$
- (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10n}}$
- (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$
- (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$
- (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$
- (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3+n^2}$
- (h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+3}$
- (i) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

28. (*) Demostrar la desigualdad

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}$$

29. Si $r_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n)$, demostrar que r_n converge.

30. Hallar la suma de las siguientes series:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}$.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6^{n-2}}$.

31. A una pelota se la deja caer desde una altura de 5 metros. Cada vez que rebota salta a una altura de $3/4$ partes de la distancia de la que cayó. Calcule la distancia total recorrida hasta que queda en reposo.

32. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 - 4n + 2}{n!}$

Sugerencia: descomponer el término general en la forma

$$\frac{3n^2 - 4n + 2}{n!} = \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n-1)!} + \frac{C}{(n-2)!}$$

33. Serie aritmético-geométrica:

Si $a, b \in \mathbb{R}$ y $|r| < 1$, probar que la serie aritmético-geométrica converge y suma

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a + bn)r^n = \frac{a(1-r) + br}{(1-r)^2}$$

y con este resultado calcular la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$.

34. Cuántos primeros términos hay que tomar en las series siguientes para que su suma difiera no más que en $1/10^6$ de la suma de las series correspondientes:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$.

35.

(a) ¿Es cierto que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ son dos series divergentes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (a_k \cdot b_k)$ es divergente?

(b) Si $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ y $(a_n)_{n \geq 1}$ es creciente, entonces:

i. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

ii. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ no converge.

36. Decir si las siguientes series convergen condicional o absolutamente:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 - 2n - 1}{n!}$

37.

- (a) Probar que la serie armónica alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge condicionalmente.
- (b) Sea $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Reordenemos los términos de la serie de modo que después de un término positivo vayan dos términos negativos:

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16}\right) + \dots$$

Determinar la expresión del término general de esta serie y demostrar que la serie obtenida converge a $s' = \frac{1}{2}s$.