Análisis I - Práctica 1

1. Representar los siguientes conjuntos en $\mathbb{R}$
   (a) $\{x : |x-1| < 1, x \notin \mathbb{Z}\}$
   (b) $\{x : |x-3| < |2-x|\,\}$
   (c) $\{x : 0 < x^2 \leq x^3\}$
2. (a) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados superiormente
      i. $\mathbb{R}_{>0}$
      ii. $\{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} \text{ con } n = m^2\}$

   (b) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados inferiormente
      i. $\mathbb{Z}$
      ii. $\{x^{-1} : x < 0\}$
      iii. $\mathrm{Im}(f)$ donde $f(x) = -x^2 + 2x + 1$
3. Calcular supremo, ínfimo, máximos y mínimo (si existen) y probar que lo son, de los siguientes conjuntos:
   (a) $\{n \in \mathbb{N} : 20 < n \leq 35\}$
   (b) $\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
   (c) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$
   (d) $\{\frac{2n}{7n-3} : n \in \mathbb{N}\}$
4. (a) Probar que el conjunto $A = \{a \in \mathbb{Q}/a^2 < 2\}$ no tiene máximo ni supremo en $\mathbb{Q}$.
   (b) Probar que el conjunto $B = \{a \in \mathbb{Q}/a^2 > 2\}$ no tiene mínimo ni ínfimo en $\mathbb{Q}$.

   Sugerencia: dado $a \in A$ mostrar explícitamente un elemento mayor en A (análogamente para el item b).
5. Hallar
   (a) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{\frac{n^2}{2^n}\}$
   (b) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\{\frac{\sqrt{n+1}}{10+n}\}$
   (c) $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\{(1+\frac{1}{n})^n\}$
   (d) $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}\{n^2 - 9n - 10\}$

6. Resolver:

   (a) $|x+3| < 1$
   (b) $|x-3| \geq 10$
   (c) $|x| > |x+3|$
   (d) $|3x-1| < |x-1|$
   (e) $\left|\frac{x-2}{3x+1}\right| \leq 1$

7. Estudiar los extremos de los siguientes conjuntos y representarlos en la recta real:

   (a) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x+3| + |x-9| > 2\}$
   (b) $B = \{x \in \mathbb{R} : ||x+2| - |x-1|| < 1\}$
   (c) $C = \{x \in \mathbb{R} : |x^3 - 1| + |2 - x^3| = 1\}$

8. Sea $a \geq 0$. Para qué valores de b se verifica que:

   (a) $|a+b| = |a| + |b|$
   (b) $|a+b| < |a| + |b|$
   (c) $|a-b| = |a| + |b|$
   (d) $|a-b| < |a| + |b|$
   (e) $||a| - |b|| = |a-b|$
   (f) $||a| - |b|| < |a-b|$

9. Sean $0 \leq x \leq y$. Probar que $x \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq y$.

10. Mostrar que $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ y determinar para cada $\varepsilon > 0$ un valor $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que $\left|\frac{n+1}{n} - 1\right| < \varepsilon$ si $n > n_0$. Completar la siguiente tabla:

ε	$0,1$	$0,001$	$0,00001$	10^{-6}
n_0				

11. Demostrar por definición los siguientes límites:

   (a) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin(n^2+3n-2)-3}{n} = 0$
   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n^2-n+4} = 1$
   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3n}{2n+5} = \frac{3}{2}$
   (d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^2-\sin(n)}{n^2+\cos(n)} = 1$

12. Sean $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ y $g(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ polinomios de grado n y m respectivamente. Suponer que $a_n, b_m > 0$ e investigar el límite

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{f(k)}{g(k)}$$

para los casos $n > m, n = m, n < m$.

13. Calcular:

    (a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k \sin(n!)}{n+1}$ $(0 \leq k < 1)$

    (b) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2}\right)$

    (c) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{4}{n^3} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^3}\right)$

    Sugerencia: Usar que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ y $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

14. Estudiar la convergencia de

    (a) $x_n = (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{4}) \cdots (1 - \frac{1}{2^n})$

    (b) $x_n = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdots \frac{n+1}{2n-1}$

15. La sucesión de Fibonacci, se define como:

$$F_1 = F_2 = 1 \text{ y } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

    Probar que $\lim_{n\to+\infty} F_n = +\infty$.

16. Sea $a_{n+1} = \frac{2}{a_n}, a_1 = \alpha \neq 0$. ¿Para qué valores de α es a_n convergente?

17. Demostrar que la covergencia de una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ implica la de $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$. ¿Vale la recíproca?

18. (a) Calcular $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{r}$ con r número real positivos sin usar ningún criterio de convergencia.

    (b) Calcular $\lim_{n\to\infty} r^n$ con r número real sin usar ningún criterio de convergencia.

19. (a) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$ tal que existe $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Probar que:

        i. Si $l < 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
        ii. Si $l > 1$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
        iii. Probar que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

    (b) Calcular, usando el ejercicio anterior, el límite de las siguientes sucesiones:

        i. $a_n = \sqrt[n]{n}$

   ii. $a_n = \sqrt[n]{n!}$
   iii. $a_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}$

   (c) Comprobar que puede existir $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ $(a_n > 0)$ y no existir $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ (Sugerencia: considerar $a_n = 2 + (-1)^n$).

20. Probar que para $|x| < 1$ la sucesión

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

tiende a cero cuando n tiende a infinito, cualquiera sea el número real α.

21. Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

   (a) $\frac{(n+3)!-n!}{(n+4)!}$
   (b) $\frac{n^4-n+2^n n}{(n^3-1)2^n}$
   (c) $\frac{8^n-4^n}{3^n}$
   (d) $\frac{\sqrt[n]{1+2^n+\cdots+n^n}}{n}$
   (e) $\sqrt[n]{n^2+n}$
   (f) $\frac{\cos(n\pi/2)}{n^2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}$
   (g) $\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}$
   (h) $\frac{n}{e^n}$
   (i) $\frac{\ln(n)}{n}$
   (j) $\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^n$

22. Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

   (a) $\left(1-\frac{1}{n}\right)^n$
   (b) $\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{\frac{n^2+4}{n+1}}$
   (c) $\left(\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}-5}\right)^{\sin(n)}$
   (d) $\left(n^4+n\right)^{1/n^5}$
   (e) $n^{\frac{\sin(n)}{n}}$

23. Escribir los primeros tres términos de las series dadas por los siguientes términos generales:

   (a) $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

(b) $u_n = \frac{n^3}{n+1}$

(c) $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(d) $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

24. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n-1}{2n^2+3}$.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10n}}$.

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$.

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$.

(g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3+n^2}$.

(h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+3}$.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$

25. (*) Demostrar la desigualdad

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}$$

26. Si $r_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$, demostrar que r_n converge.

27. Hallar la suma de las siguientes series:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6^{n-2}}$

28. A una pelota se la deja caer desde una altura de 5 metros. Cada vez que rebota salta a una altura de 3/4 partes de la distancia de la que cayó. Calcule la distancia total recorrida hasta que queda en reposo.

29. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-4n+2}{n!}$

Sugerencia: descomponer el término general en la forma

$$\frac{3n^2-4n+2}{n!} = \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n-1)!} + \frac{C}{(n-2)!}$$

30. Cuántos primeros términos hay que tomar en las series siguientes para que su suma difiera no más que en $1/10^6$ de la suma de las series correspondientes:

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$.

    (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

    (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$.

31. (a) ¿Es cierto que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ son dos series divergentes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty}(a_k \cdot b_k)$ es divergente?

    (b) Si $a_n > 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y $(a_n)_{n\geq 1}$ es creciente, entonces:

        i. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

        ii. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ no converge.

32. Decir si las siguientes series convergen condicional o absolutamente:

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}$.

    (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$.

    (c) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2-2n-1}{n!}$

33. (a) Probar que la serie armónica alternada $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge condicionalmente.

    (b) Sea $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Reordenemos los términos de la serie de modo que después de un término positivo vayan dos términos negativos:

    $$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16}\right) + \cdots$$

    Determinar la expresión del término general de esta serie y demostrar que la serie obtenida converge a $s' = \frac{1}{2}s$.