Análisis I - 2004
Lista de temas teóricos para el examen final

Una variable

1. Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ es acotada.
2. Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ alcanza el máximo y el mínimo valor.
3. (a) Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es tal que $f(a)<0<f(b)$ entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.
   (b) Corolario: Teorema de valores intermedios.
4. Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $x_0\in(a,b)$ es un máximo o un mínimo y f derivable en x_0 entonces $f'(x_0)=0$.
5. Teorema de Rolle: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y derivable en (a,b). Si $f(a)=f(b)$ entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=0$.
6. Teorema de Lagrange: Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua y derivable en (a,b). Entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.
7. Teorema de Cauchy: Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ continuas y derivables en (a,b). Entonces existe $c\in(a,b)$ tal que $(f(b)-f(a))g'(c)=(g(b)-g(a))f'(c)$.
8. Fórmula de Taylor y expresión del resto de Lagrange.

Series

1. Criterio de Cauchy (o de la raíz).
2. Criterio de D'Alembert (o del cociente)
3. Criterio de Leibniz para series alternadas.
4. Existencia del radio de convergencia de una serie de potencias.

Varias variables

1. Si una función es diferenciable en (x_0,y_0) entonces es continua en (x_0,y_0).
2. Sea B una bola abierta alrededor del punto (x_0,y_0) tal que para todo $(x_0,y_0)\in B$ existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ y son continuas en (x_0,y_0). Entonces f es diferenciable en (x_0,y_0).

3. Teorema del valor medio en varias variables (ejercicio 44, guía práctica No.6).

4. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en un punto $P \in \mathbb{R}^n$, sea $v \in \mathbb{R}^n$ con $\|v\| = 1$. Entonces $\dfrac{\partial f}{\partial v}(P)$ existe y es igual a $\nabla f(P) \cdot v$ (el producto interno entre $\nabla f(P)$ y v).

5. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en un punto $P \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla f(P) \neq 0$. Entonces en el punto P, $\nabla f(P)$ apunta en la dirección de máximo crecimiento de f.

6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que las derivadas de segundo orden existen y son todas continuas en una bola B alrededor de un punto P. Demostrar que entonces $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P)$.

7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en P y P un extremo local de f, entonces $\nabla f(P) = 0$.
