

Análisis I - Práctica 4

1. Hallar los valores de x para los cuales convergen las series:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$
(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$
(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$
(d) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$
(e) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$
(f) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+1)^n$

2. Escribir los primeros cuatro términos del desarrollo en serie de potencias de x de las funciones:

(a) $\tan(x)$
(b) $e^{\cos(x)}$
(c) $\ln(1+e^x)$
(d) $(1+x)^x$

3. Calcular la serie de Mc Laurin de las siguientes funciones: e^x , e^{x^2} , e^{-x^2} , a^x y $\sin x$.

4. Aprovechando las fórmulas del desarrollo en serie de potencias de las funciones e^x , $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ desarrollar en series de potencias las siguientes funciones y determinar los radios de convergencia:

(a) $\frac{1}{1-x}$
(b) $\sqrt{1+x}$
(c) $\frac{1}{10+x}$
(d) $\frac{1}{1+x^2}$
(e) $\cos^2(x)$
(f) $(1+x)e^{-x}$
(g) $\frac{1}{4-x^4}$
(h) $\frac{e^x-1}{x}$
(i) $\frac{1}{(1+x)^2}$
(j) $\arctan(x)$
(k) $\frac{x}{(1+x^2)^2}$

5. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ para $|x| < 1$. Rta: $\frac{x}{(1-x)^2}$.
6. (a) Calcular el desarrollo en serie de $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, indicando el radio de convergencia.
- (b) Comprobar que con el desarrollo anterior, se puede escribir $\ln(a)$ como una serie convergente de número racionales, cualquiera sea $a \in \mathbb{N}$. Escriba una fórmula para $\ln(5)$.
7. Calcular:
- (a) $\cos(10^\circ)$ con error menor que 10^{-4} .
- (b) $\arctan(1/5)$ con error menor que 10^{-4} .
- (c) $\ln(5)$ con error menor que 10^{-3} .
- (d) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ con error menor que 10^{-4} .
8. Desarrollando en serie de potencias de x integrar las siguientes ecuaciones diferenciales y definir el dominio de aplicación de la solución obtenida.
- (a) $y' + xy = 0, \quad y(0) = 0$
- (b) $y'' + xy' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
- (c) $y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
- ¿De qué función es éste el desarrollo en serie de potencias de x ?
9. Encuentre los primeros cuatro términos distintos de cero del desarrollo en serie de potencias de x de las siguientes ecuaciones
- (a) $y'' = x + y^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
- (b) $y' = x^2y + y^3, \quad y(0) = 1$
- (c) $y'' = xy^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$