Análisis I - Práctica 5

1. Dado $x \in \mathbb{R}^n$ se define $||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

   (a) Pruebe que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se verifican las siguientes desigualdades:

      i. $|x_i| \le ||x|| \quad \forall i = 1, \dots, n$

      ii. $||x||^2 \le n \cdot (\max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\})^2$

      iii. $\max_i |x_i| \le ||x|| \le \sqrt{n} \max_i |x_i|$. Describa geométricamente esta doble desigualdad.

   (b) Usando (a) concluya que:

   $$\left\{x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{n} \max_{1 \le i \le n} |x_i| < r\right\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < r\} \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^n : \max_{1 \le i \le n} |x_i| < r\right\}$$

   (c) Pruebe que son equivalentes para $A \subset \mathbb{R}^n$:

      i. A es abierto.

      ii. $\forall y \in A, \exists r > 0 / \{x \in \mathbb{R}^n : \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i| < r\} \subseteq A$

2. (a) Pruebe que los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son abiertos

      i. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 7\}$

      ii. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y > 1\}$

      iii. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \ne 0 \text{ ó } y \ne 0\}$

   (b) Dé un ejemplo de un conjunto en $\mathbb{R}^3$ que no sea ni abierto ni cerrado.

3. Para cada uno de los siguientes conjuntos $A \subset \mathbb{R}^3$, calcule $Fr(A)$, $\bar{A}$, $\bar{A} - A$ y $A - Fr(A)$:

   (a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \le 1\}$

   (b) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \text{ y } z < 2\}$

   (c) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \text{ y } x^2 + y^2 + (z + 1)^2 < 1\}$

   (d) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \text{ y } x^2 + y^2 < 1/2\}$

4. Determine cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son cerrados y acotados:

   (a) $K_1 = B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$

   (b) $K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \le 1\}$

   (c) $K_4 = \left\{(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\right\}$

   (d) $K_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1 \text{ e } y = 0\}$

5. Dé el dominio de definición para cada una de las siguientes funciones y grafíquelo:

   (a) $f(x,y) = \ln\{(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)\}$

   (b) $f(x,y) = \sqrt{6 - (2x + 3y)}$

   (c) $f(x,y) = \frac{1}{x}$

   (d) $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \sqrt{y - x^2}$

   (e) $f(x,y) = \frac{\ln(1-y+x^2)}{\sin(x)}$

   (f) $f(x,y) = \int_x^y \frac{1}{1+t^2} dt$

   (g) $f(x,y) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-x^2+y^2}}$

6. Encuentre las curvas de nivel de las siguientes funciones:

   (a) $z = x + y$

   (b) $z = x^2 + y^2$

   (c) $z = \sqrt{x \cdot y}$

   (d) $z = \frac{y}{x^2}$

   (e) $z = x^2 - y^2$

7. Estudie las superficies de $\mathbb{R}^3$ representadas por las siguientes ecuaciones y diga cuáles de estas superficies son la gráfica de una función $z = f(x,y)$:

   (a) $z = 2x^2 + y^2$

   (b) $z^2 = 1 - x^2 - \frac{y^2}{2}$

   (c) $z = \frac{1}{x^2+y^2}$

   (d) $3x + 2y - z = 0$

   (e) $z^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} - 2$

8. Encuentre las superficies de nivel de las siguientes funciones:

   (a) $u = x + y + z$

   (b) $u = x^2 + y^2 - z^2$

   (c) $u = x^2 + y^2 + z^2$

   (d) $u = x^2 + 2y^2$

9. (a) Usando sólo la definición de límite demuestre que:

   i. $\lim_{(x,y)\to(1,0)} x + y = 1$

   ii. $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,8)} xy = -8$

   (b) En la parte ii del item (a), para cada $\varepsilon = 1, \varepsilon = 1/100, \varepsilon = \alpha^2$ encuentre $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\|(x,y) - (-1,8)\| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |xy + 8| < \varepsilon$$

10. Pruebe que:

   (a) $\lim\limits_{(x,y)\to(7,2)} x^2 + y^2 - xy = 39$

   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} xe^{xy} = 0$

   (c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \frac{y^2+\cos(\pi-x)}{y} = \frac{8}{3}$

   (d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,3)} \sin(x\cos y) = 0$

   (e) $\lim\limits_{(x,y)\to(c,0)} \frac{\sin(x^2y)}{x^2-y^2} = 0$ con $c \neq 0$

   (f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} ye^x = 1$

11. (a) Sea $f : B_r(a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0$. Pruebe que:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\sin(f(x,y))}{f(x,y)} = 1$$

   (b) Sea $f : B_r(a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = +\infty$. Pruebe que:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\ln(f(x,y))}{f(x,y)} = 0$$

   (c) Calcule:

   i. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$

   ii. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}$

   iii. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$

12. Analice la existencia de los límites restringido a los ejes coordenados y del límite doble de las siguientes funciones en el origen:

   (a) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$

   (b) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

   (c) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

(d) $f(x,y) = \frac{\sin x}{y}$

(e) $f(x,y) = |x|^y$

(f) $f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{xy+y-x}$

(g) $f(x,y) = \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$

(h) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{x^2y^2}$

(i) $f(x,y) = \frac{x^2y^2-x^2+1}{x^2-y^2}$

(j) $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

(k) $f(x,y) = \frac{xy}{|x|+|y|}$

(l) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

(m) $f(x,y) = x\sin(\frac{\pi}{y}) + y\sin(\frac{\pi}{x})$

(n) $f(x,y) = \sin(\frac{x}{y})$

(o) $f(x,y) = \frac{e^{x(y+1)}-x-1}{|x-y|}$

13. Demuestre que las siguientes funciones tienden a cero si (x,y) se aproxima al origen a lo largo de cualquier recta, pero para ninguna de ellas existe el límite cuando $(x,y) \to (0,0)$

(a) $f(x,y) = \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$

(b) $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2-x}$

(c) $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

14. Estudie la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados

(a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ en $(1,0)$ y $(0,0)$

(b) $f(x,y) = \begin{cases} |y|^x\,(1+x)^y & (x,y) \neq (0,0) \text{ y } x > -1 \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ en $(1,0)$ y $(0,2)$

(c) $f(x,y) = \sin(x\cos y)$ en $(1,1)$ y $(0,2)$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} x+y & x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$ en $(0,0)$ y $(1,1)$

15. Dada la función $f(x,y) = xy\sin\left(\frac{1}{x}\right)\sin\left(\frac{1}{y}\right)$

(a) Calcular su dominio.

(b) Definirla, si es posible, en $\mathbb{R}^2 - \mathrm{Dom}(f)$, de modo que resulte continua en todo $\mathbb{R}^2$.

16. Demuestre que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es continua respecto de cada una de las variables por separado pero no lo es como función de ambas.

17. Estudie la continuidad de las siguientes funciones:

(a) $f(x,y) = (x^2, e^x)$

(b) $f(x,y) = \left(\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}\right)$

18. Sea $f : \{(x,y)/x \neq 0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\sin(xe^y)}{2x}$$

Calcule $\lim_{(x,y)\to(0,b)} f(x,y)$, donde b es cualquier número real.

19. (a) Sea $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \frac{1}{1-||(x,y)||}$. Pruebe que f es continua y no es acotada.

(b) Sea $g : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x,y) = ||(x,y)||$. Pruebe que g es continua y acotada pero no alcanza su máximo en $B_1(0)$.

20. Sea $f(x,y) = \frac{\sin(x^2 y)}{\ln(1-x^2)}$

(a) Encuentre el dominio D de f y grafíquelo.

(b) Dado $q = (q_1, q_2) \in Fr(D)$. ¿Existe $\lim_{(x,y)\to(q_1,q_2)} f(x,y)$?