

## Análisis I - Práctica 6

1. Calcule las derivadas parciales de las siguientes funciones:

- (a)  $f(x, y) = x^4 + 2xy + y^3x - 1$
- (b)  $f(x, y, z) = ye^x + z$
- (c)  $f(x, y) = x^2 \sin^2(y)$
- (d)  $f(x, y) = \sin x$
- (e)  $f(x, y, z) = z(\cos(xy) + \ln(x^2 + y^2 + 1))$
- (f)  $f(x, y) = xe^{x^2+y^2}$
- (g)  $f(x, y) = \int_x^y e^{\sin t} dt$
- (h)  $f(x, y) = \int_x^{x^2+y^2} e^t dt$
- (i)  $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$

2. Calcule

- (a)  $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1)$  para  $f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$
- (b)  $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1)$  para  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2} + \ln(y)$
- (c)  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1)$  y  $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1)$ , para  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

3. Dadas las funciones

$$f_1(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$f_2(x, y) = |x| + |y|$$

$$f_3(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Demuestre que en el origen

- (a)  $f_1$  es discontinua aunque existen las derivadas parciales.
- (b)  $f_2$  no admite derivadas parciales pero es continua.
- (c)  $f_3$  es diferenciable pero sus derivadas parciales son discontinuas.

4. Estudie la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de las siguientes funciones en el origen:

(a)  $f(x, y, z) = \sqrt{|xyz|}$

(b)  $f(x, y) = \begin{cases} x \sin\left(4 \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

(c)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(d)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

(e)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y} \sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$

5. Sea

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Muestre que  $f$  no es diferenciable en  $(0, 0)$ . Sin embargo, para cualquier curva diferenciable  $\Phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  que pase por el origen una sola vez, se cumple que  $f(\Phi(t))$  es derivable para todo  $t$ .

6. Encuentre la ecuación del plano que pasa por  $(2, 1, 0)$ ,  $(3, 2, -1)$ ,  $(2, -1, 1)$ .7. Dada la transformación lineal  $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $T(x, y) = 2x - 3y$ (a) Calcule la ecuación del plano  $\text{Graf}(T)$ .

(b) Encuentre un sistema de generadores de dicho plano.

8. Estudie la diferenciablez de las siguientes funciones en los puntos indicados y escriba la ecuación del plano tangente cuando éste exista.

(a)  $f(x, y) = xy + 1 - \sin\left(\frac{x^2}{2}\right)$  en  $(1, 5)$  y en  $(2, 2)$ .

(b)  $f(x, y) = x^{1/4}y^{1/4}$  en  $(0, 0)$  y en  $(16, 1)$ .

(c)  $f(x, y) = \frac{x}{y}$  en  $(x_0, y_0)$  con  $y_0 \neq 0$ .

(d)  $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  en  $(0, 0)$  y en  $(1, 0)$ .

(e)  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$  en  $(0, 0)$  y en  $(-1, 1)$ .

9. Usando la expresión

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

para una función  $f$  adecuada, aproxime  $(0, 99e^{0,2})^8$ .

10. (a) Encuentre una transformación lineal  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  cuyo gráfico sea el plano

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$$

(b) De la matriz en la base canónica asociada a la  $f$  hallada en (a).

11. (a) Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2, 2x_1 + 3x_2)$$

i. Verifique que  $f$  es una transformación lineal y calcule su matriz asociada.

ii. Calcule la matriz de la diferencial  $Df(x)$ .

iii. ¿Qué relación hay entre estas dos matrices?

(b) Muestre que lo ocurrido en el item anterior vale para cualquier transformación lineal  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ .

12. Calcule  $DF(x)$  para las siguientes funciones:

(a)  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $F(x, y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$

(b)  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $F(x, y, z) = (x + e^z + y, yx^2)$

(c)  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \|x\|^2$

13. Sean  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$  las transformaciones lineales dadas por

$$F(x_1, x_2) = (2x_1, x_1 + x_2, 7x_1 - x_2)$$

$$G(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_3, x_1 - 4x_2, 2x_1 - x_2 + x_3, 5x_2)$$

(a) Calcule las matrices asociadas a  $F$  y a  $G$ .

(b) Calcule  $G \circ F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$  y su matriz asociada, ¿qué relación hay entre ésta y las halladas en a)? Justifique la respuesta.

14. Sean  $f(u, v, w) = u^2 + v^3 + wu$  y  $g(x, y) = x \sin y$ . Dadas

$$u(t) = t^2 + 1, v(t) = \sin t, w(t) = t - 1 \text{ y } x(t) = \sin t, y(t) = t$$

calcule

$$\frac{d}{dt}f(u(t), v(t), w(t)) \text{ y } \frac{d}{dt}g(x(t), y(t))$$

- (a) usando la regla de la cadena
- (b) sustituyendo

15. Sean  $f(u, v) = e^{uv} \sin(u^2 + v^2)$ ,  $g(u, v, w) = \ln(u^2 + v^2 + w^2 + 1)$ . Dadas

$$u(x, y) = x + y, v(x, y) = xy, w(x, y) = x - y + 1$$

calcule las derivadas parciales de las funciones

$$f(u(x, y), v(x, y)) \text{ y } g(u(x, y), v(x, y), w(x, y))$$

- (a) usando la regla de la cadena
- (b) sustituyendo

16. Calcule las derivadas parciales de las siguientes funciones:

- (a)  $f(x, y) = \int_0^{2y} x^2 z + z^3 dz$
- (b)  $f(x, y) = \int_{\sqrt{x}}^x \sin(xyz) dz$
- (c)  $f(x, y, z) = \int_5^{x+2y} \sin(x^2 + yz + t) dt$

17. ¿Para qué valores de  $p \in \mathbb{R}_{>0}$  es

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^p \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

diferenciable en  $\mathbb{R}^2$ ? ¿Para qué valores de  $p$  es  $f$  de clase  $C^1$ ? (Sugerencia: considerar  $g(t) = t^p \sin(\frac{1}{t})$ ).

18. Sean  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivables y  $G : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable. Calcule las derivadas parciales de las siguientes funciones:

- (a)  $F(x, y) = G(f(x)g(y), f(x)h(y))$
- (b)  $F(x, y) = G(x^y, y^x) \quad (x, y > 0)$
- (c)  $F(x, y) = G(x, G(x, y))$
- (d)  $F(x, y) = f(x)^{g(y)} \quad (\text{si } f(x) > 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{R})$
- (e)  $F(x, y) = G\left(\int_x^{f(y)} h(t) dt, g(y)\right)$

19. Calcule el gradiente de  $f$  para

- (a)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + z^2$
- (b)  $f(x, y, z) = xy + xz + yz$

$$(c) f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

20. Calcule la derivada direccional de  $f$  en  $x_0$  en la dirección  $v$  siendo:

$$(a) f(x, y) = \sin x \cos y \quad x_0 = (1, 1) \quad v = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$(b) f(x, y) = x^4 + \ln(xy) \quad x_0 = (e, 1) \quad v = \left( \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

$$(c) f(x, y, z) = e^z(xy + z^2) \quad x_0 = (0, 1, 0) \quad v = \left( 0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$(d) f(x, y, z) = y + yz + zxy \quad x_0 = (1, 1, 1) \quad v = \left( \frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$(e) f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 \quad x_0 = (1, 1, 1) \quad v = \left( \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

$$(f) f(x, y, z) = x^{yz} \quad x_0 = (e, e, 0) \quad v = \left( \frac{12}{13}, \frac{3}{13}, \frac{3}{13} \right)$$

Si  $f$  es diferenciable en  $x_0$  verificar que la derivada calculada coincide con  $\nabla f(x_0) \cdot v$ .

21. Sea  $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$

(a) Usando la definición de derivada direccional, muestre que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

y que  $\pm e_1, \pm e_2$  son las únicas direcciones para las cuales existe la derivada direccional en el origen.

(b) Muestre que  $f$  es continua en  $(0, 0)$ .

(c) ¿Es  $f$  diferenciable en  $(0, 0)$ ?

22. Sean  $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciables en  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Demuestre que la función definida por  $h(x) = f(x)g(x)$  es diferenciable en  $x_0$  y

$$\nabla h(x_0) = f(x_0)\nabla g(x_0) + g(x_0)\nabla f(x_0)$$

¿Qué relación existe entre las derivadas direccionales de  $h$  en  $x_0$  en la dirección  $v$  ( $\|v\| = 1$ ) y las derivadas direccionales de  $f$  y  $g$  en  $x_0$  en la misma dirección?

23. Calcule las derivadas direccionales de  $f$  en el origen en cualquier dirección  $v$ ,  $\|v\| = 1$ , siendo

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

24. Encuentre la dirección en que la función  $z = x^2 + xy$  crece más rápidamente en el punto  $(1, 1)$ . ¿Cuál es la magnitud  $\|\nabla z\|$  en esta dirección? Interprete geoméricamente esta magnitud.

25. Si  $h(x, y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$  denota la altura de una montaña en la posición  $(x, y)$ . ¿En qué dirección desde  $(1, 0)$  debería uno comenzar a caminar para escalar más rápido?
26. (a) Muestre que si  $\nabla f(x_0) \neq 0$  entonces  $-\nabla f(x_0)$  apunta en la dirección a lo largo de la cual  $f$  decrece más rápidamente.
- (b) Una distribución de temperaturas en el plano está dada por la función  $f(x, y) = 10 + 6 \cos(x) \cos(y) + 4 \cos(3y)$ . En el punto  $(\pi/3, \pi/3)$  encuentre las direcciones de más rápido crecimiento y más rápido decrecimiento.

27. El capitán Ralph se encontró en el lado soleado de Mercurio y notó que su traje espacial se fundía. La temperatura en su sistema rectangular de coordenada en su vecindad viene dada por

$$T(x, y, z) = e^{-x} + e^{-zy} + e^{-3z}$$

Si él está ubicado en  $(1, 1, 1)$ . ¿En qué dirección deberá comenzar a moverse con el fin de enfriarse lo más rápido posible?

28. Calcule los ángulos formados por el gradiente de la función  $f(x, y) = x^{\sqrt{3}} + y$  en el punto  $(1, 1)$  y los ejes de coordenadas.
29. Si se corta la esfera  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  con el plano de ecuación  $y = 0$  se obtiene una circunferencia. De la parametrización de la recta tangente a dicha circunferencia en el punto  $(1, 0, 0)$  y en el punto  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ .
30. (a) Encuentre dos vectores no paralelos ortogonales a  $(-1, 1, 2)$ .
- (b) Escriba la ecuación del plano que pasa por el punto  $(0, 1, 2)$  y es ortogonal al vector  $(1, 1, 1)$ .
31. (a) Escriba la ecuación del plano que pasa por el punto  $(a, b, c)$  y es ortogonal al vector  $(v_1, v_2, v_3)$ .
- (b) Encuentre la ecuación de la recta normal al plano de ecuación  $6x - 2y + 4z = 0$  que pasa por el punto  $(3, 1, 1)$ .
32. (a) Encuentre un vector unitario perpendicular a los dos vectores  $(1, 1, 1)$  y  $(3, 1, 0)$ .
- (b) Encuentre un vector normal al plano que pasa por los puntos  $(1, 0, 1)$ ,  $(3, 4, 0)$  y  $(1, -1, 3)$ .
33. Sea  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  y  $(x_0, y_0, z_0)$  un vector. Muestre que el núcleo de la transformación lineal  $Df(x_0, y_0, z_0)$  es ortogonal a  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$ .
34. Dada la superficie  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ . Muestre que el vector  $v = (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  es normal a la superficie  $S$  en el punto  $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$  e interprete este hecho geoméricamente.

35. Calcule ecuación del plano tangente y de la recta normal, cuando existan, a las superficies dadas en los puntos indicados
- (a)  $x^{10}y - \cos(z)x + 7 = 0 \quad x_0 = (7, 0, 0)$
  - (b)  $xy - z \ln(y) + e^{xy} = 1 \quad x_0 = (0, 1, 1)$
  - (c)  $xy \sin(y) + ze^{xy} - z^2 = 0 \quad x_0 = (4, 0, 1)$
  - (d)  $\cos(x) \cos(y)e^z = 0 \quad x_0 = (\pi/2, 1, 0)$
36. Encuentre los planos tangentes a la superficie  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21\}$  que sean paralelos al plano  $\Pi : x + 4y + 6z = 8$ .
37. Dada una función  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $(x_0, y_0)$  y  $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $h(x, y, z) = f(x, y) - z$ , vea qué relación existe entre el plano tangente al gráfico de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  y el plano tangente a una superficie de nivel de  $h$  en  $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ .
38. Sea  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$ . Pruebe que  $|DF(x, y)| \neq 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$  pero que  $F$  no es inyectiva.
39. Determine si las siguientes aplicaciones son localmente inversibles de clase  $C^1$  en el punto dado
- (a)  $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$  en  $(x, y) \neq (0, 0)$
  - (b)  $F(x, y) = (\sin x, \cos(xy))$  en  $(\pi, \pi/2)$
40. Definimos  $F : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}$  como

$$F(x_1, x_2, \dots, x_9) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$$

- (a) Pruebe que si  $F(a) \neq 0$ , entonces hay un entorno de  $a$  tal que si  $x$  está en ese entorno,  $F(x) \neq 0$ .

- (b) Concluya que si la matriz  $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$  es inversible para un  $a = (a_1, a_2, \dots, a_9) \in$

$\mathbb{R}^9$ , entonces para  $x$  en un entorno de  $a$  será inversible la matriz  $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$ .

41. Sea  $f(x, y, z) = x^3 - 2y^2 + z^2$ . Demuestre que  $f(x, y, z) = 0$  define una función implícita  $x = \varphi(y, z)$  en el punto  $(1, 1, 1)$ . Encuentre  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 1)$  y  $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1, 1)$ .
42. Encuentre la solución  $y = f(x, z)$  de  $x^2 + y^2 - z^3 = 0$  en un entorno de los siguientes puntos del plano  $xz$  y escribir explícitamente esos entornos

(a)  $(5, 10)$

(b)  $(0, 64)$

43. Determine las derivadas parciales de las funciones que quedan definidas implícitamente en un entorno del punto dado mediante las relaciones

(a)  $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 - y^2 = 1 \quad P = (2, 0)$

(b)  $g(x, y) = x^5 + y^y + xy = 3 \quad P = (1, 1)$

(c)  $h(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 8 = 0 \quad P = (0, 0, 2)$

44. Teorema del Valor Medio para 2 variables

(a) Dados  $P_1$  y  $P_2$  puntos en  $\mathbb{R}^2$ , dibuje abiertos distintos que contengan al segmento  $P_1P_2$ .

(b) De alguna función definida en alguno de estos abiertos con imagen en  $\mathbb{R}$  cuyo gráfico sea conocido. Graficarla e interpretar geoméricamente  $f(P_1) - f(P_2)$ .

(c) Demuestre que si  $f$  es una función diferenciable definida en algún abierto que contiene al segmento  $P_1P_2$ , entonces vale que

$$f(P_1) - f(P_2) = \nabla f(P) \cdot (P_1 - P_2)$$

donde  $P$  es algún punto del segmento  $P_1P_2$ , y el producto del segundo miembro es el producto escalar de vectores.

45. (a) Sea  $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ , donde  $B$  es una bola en  $\mathbb{R}^2$ .

i. Pruebe que si  $f$  es constante en  $B$ , entonces  $\nabla f(x, y) = 0$  cualquiera sea  $(x, y) \in B$ .

ii. Pruebe que si  $\nabla f(x, y) = 0$  cualquiera sea  $(x, y) \in B$ , entonces  $f$  es constante en  $B$ .

(b) Si  $f, g : B \rightarrow \mathbb{R}$  son diferenciables, y verifican que  $\nabla f(x, y) = \nabla g(x, y)$  para todo  $(x, y) \in B$ , pruebe que entonces existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x, y) = g(x, y) + c$ .

46. Muestre que la derivada direccional de  $f$  en el punto  $(x_0, y_0)$  en la dirección  $-v$  (recordar que  $\|v\| = 1$ ) es igual a la derivada direccional de  $f$  en  $(x_0, y_0)$  en la dirección de  $v$  pero con el signo opuesto, o sea

$$-\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial(-v)}(x_0)$$

47. (a) Pruebe que si  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable y tal que para algún  $v$ ,  $\|v\| = 1$  se cumple que  $Df(x) \cdot v = 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ , entonces en cada recta que lleve la dirección de  $v$ ,  $f$  será constante.

(b) Construya ejemplos de lo demostrado anteriormente para  $n = 2$  y  $v = (1, 0), (0, 1)$  y  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .