

## Análisis I - Práctica 1

1. Representar los siguientes conjuntos en  $\mathbb{R}$

(a)  $\{x : |x - 1| < 1, x \notin \mathbb{Z}\}$

(b)  $\{x : |x - 3| < |2 - x|\}$

(c)  $\{x : 0 < x^2 \leq x^3\}$

2. (a) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados superiormente

i.  $\mathbb{R}_{>0}$

ii.  $\{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} \text{ con } n = m^2\}$

(b) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados inferiormente

i.  $\mathbb{Z}$

ii.  $\{x^{-1} : x < 0\}$

iii.  $\text{Im}(f)$  donde  $f(x) = -x^2 + 2x + 1$

3. Calcular supremo, ínfimo, máximos y mínimo (si existen) y probar que lo son, de los siguientes conjuntos:

(a)  $\{n \in \mathbb{N} : 20 < n \leq 35\}$

(b)  $\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

(c)  $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

(d)  $\{\frac{2n}{7n-3} : n \in \mathbb{N}\}$

4. (a) Probar que el conjunto  $A = \{a \in \mathbb{Q} / a^2 < 2\}$  no tiene máximo ni supremo en  $\mathbb{Q}$ .

(b) Probar que el conjunto  $B = \{a \in \mathbb{Q} / a^2 > 2\}$  no tiene mínimo ni ínfimo en  $\mathbb{Q}$ .

Sugerencia: dado  $a \in A$  mostrar explícitamente un elemento mayor en  $A$  (análogamente para el ítem b).

5. Hallar

(a)  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{\frac{n^2}{2^n}\}$

(b)  $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{\frac{\sqrt{n+1}}{10+n}\}$

(c)  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \{(1 + \frac{1}{n})^n\}$

(d)  $\inf_{n \in \mathbb{N}} \{n^2 - 9n - 10\}$

6. Resolver:

- (a)  $|x + 3| < 1$
- (b)  $|x - 3| \geq 10$
- (c)  $|x| > |x + 3|$
- (d)  $|3x - 1| < |x - 1|$
- (e)  $\left| \frac{x-2}{3x+1} \right| \leq 1$

7. Estudiar los extremos de los siguientes conjuntos y representarlos en la recta real:

- (a)  $A = \{x \in \mathbb{R} : |x + 3| + |x - 9| > 2\}$
- (b)  $B = \{x \in \mathbb{R} : ||x + 2| - |x - 1|| < 1\}$
- (c)  $C = \{x \in \mathbb{R} : |x^3 - 1| + |2 - x^3| = 1\}$

8. Sea  $a \geq 0$ . Para qué valores de  $b$  se verifica que:

- (a)  $|a + b| = |a| + |b|$
- (b)  $|a + b| < |a| + |b|$
- (c)  $|a - b| = |a| + |b|$
- (d)  $|a - b| < |a| + |b|$
- (e)  $||a| - |b|| = |a - b|$
- (f)  $||a| - |b|| < |a - b|$

9. Sean  $0 \leq x \leq y$ . Probar que  $x \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq y$ .

10. Mostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$  y determinar para cada  $\varepsilon > 0$  un valor  $n_0 = n_0(\varepsilon)$  tal que  $\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < \varepsilon$  si  $n > n_0$ . Completar la siguiente tabla:

$\varepsilon$	0, 1	0, 001	0, 00001	$10^{-6}$
$n_0$				

11. Demostrar por definición los siguientes límites:

- (a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n^2+3n-2)-3}{n} = 0$
- (b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2+1}{n^2-n+4} = 1$
- (c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n}{2n+5} = \frac{3}{2}$
- (d)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2-\sin(n)}{n^2+\cos(n)} = 1$

12. Sean  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  y  $g(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$  polinomios de grado  $n$  y  $m$  respectivamente. Suponer que  $a_n, b_m > 0$  e investigar el límite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(k)}{g(k)}$$

para los casos  $n > m, n = m, n < m$ .

13. Calcular:

- (a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k \sin(n!)}{n+1}$  ( $0 \leq k < 1$ )  
 (b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$   
 (c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{n^3} + \frac{4}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right)$

Sugerencia: Usar que  $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$  y  $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ .

14. Estudiar la convergencia de

- (a)  $x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$   
 (b)  $x_n = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{7} \dots \frac{n+1}{2n-1}$

15. La sucesión de Fibonacci, se define como:

$$F_1 = F_2 = 1 \text{ y } F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Probar que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = +\infty$ .

16. Sea  $a_{n+1} = \frac{2}{a_n}$ ,  $a_1 = \alpha \neq 0$ . ¿Para qué valores de  $\alpha$  es  $a_n$  convergente?
17. Demostrar que la convergencia de una sucesión  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  implica la de  $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ . ¿Vale la recíproca?
18. (a) Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{r}$  con  $r$  número real positivo sin usar ningún criterio de convergencia.  
 (b) Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$  con  $r$  número real sin usar ningún criterio de convergencia.
19. (a) Sea  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_{>0}$  tal que existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$ . Probar que:  
 i. Si  $l < 1$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .  
 ii. Si  $l > 1$ , entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ .  
 iii. Probar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ .  
 (b) Calcular, usando el ejercicio anterior, el límite de las siguientes sucesiones:  
 i.  $a_n = \sqrt[n]{n}$

ii.  $a_n = \sqrt[n]{n!}$

iii.  $a_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}$

- (c) Comprobar que puede existir
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$
- (
- $a_n > 0$
- ) y no existir
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$
- (Sugerencia: considerar
- $a_n = 2 + (-1)^n$
- ).

20. Probar que para  $|x| < 1$  la sucesión

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha - 1) \cdots (\alpha - n + 1)}{n!} x^n$$

tiende a cero cuando  $n$  tiende a infinito, cualquiera sea el número real  $\alpha$ .

21. Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

(a)  $\frac{(n+3)! - n!}{(n+4)!}$

(b)  $\frac{n^4 - n + 2^n n}{(n^3 - 1)2^n}$

(c)  $\frac{8^n - 4^n}{3^n}$

(d)  $\frac{\sqrt[n]{1+2^n+\dots+n^n}}{n}$

(e)  $\sqrt[n]{n^2 + n}$

(f)  $\frac{\cos(n\pi/2)}{n^2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})}$

(g)  $\frac{2+(-1)^{n+1}}{2+(-1)^n}$

(h)  $\frac{n}{e^n}$

(i)  $\frac{\ln(n)}{n}$

(j)  $\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^n$

22. Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

(a)  $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

(b)  $\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{\frac{n^2+4}{n+1}}$

(c)  $\left(\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}-5}\right)^{\sin(n)}$

(d)  $(n^4 + n)^{1/n^5}$

(e)  $n^{\frac{\sin(n)}{n}}$

23. Escribir los primeros tres términos de las series dadas por los siguientes términos generales:

(a)  $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

- (b)  $u_n = \frac{n^3}{n+1}$   
 (c)  $u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$   
 (d)  $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

24. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n-1}{2n^2+3}$ .  
 (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ .  
 (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10n}}$ .  
 (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}$ .  
 (e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ .  
 (f)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$ .  
 (g)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3+n^2}$ .  
 (h)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+3}$ .  
 (i)  $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

25. (\*) Demostrar la desigualdad

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}$$

26. Si  $r_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n)$ , demostrar que  $r_n$  converge.

27. Hallar la suma de las siguientes series:

- (a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}}$   
 (b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$   
 (c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$   
 (d)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$   
 (e)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6^{n-2}}$

28. A una pelota se la deja caer desde una altura de 5 metros. Cada vez que rebota salta a una altura de  $3/4$  partes de la distancia de la que cayó. Calcule la distancia total recorrida hasta que queda en reposo.

29. Hallar la suma de la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2-4n+2}{n!}$

Sugerencia: descomponer el término general en la forma

$$\frac{3n^2 - 4n + 2}{n!} = \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n-1)!} + \frac{C}{(n-2)!}$$

30. Cuántos primeros términos hay que tomar en las series siguientes para que su suma difiera no más que en  $1/10^6$  de la suma de las series correspondientes:

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}$ .

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ .

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ .

31. (a) ¿Es cierto que si  $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$  son dos series divergentes, entonces  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_k \cdot b_k)$  es divergente?

(b) Si  $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$  y  $(a_n)_{n \geq 1}$  es creciente, entonces:

i.  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge.

ii.  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$  no converge.

32. Decir si las siguientes series convergen condicional o absolutamente:

(a)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}$ .

(b)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$ .

(c)  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 - 2n - 1}{n!}$

33. (a) Probar que la serie armónica alternada  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  converge condicionalmente.

(b) Sea  $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ . Reordenemos los términos de la serie de modo que después de un término positivo vayan dos términos negativos:

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16}\right) + \dots$$

Determinar la expresión del término general de esta serie y demostrar que la serie obtenida converge a  $s' = \frac{1}{2}s$ .