

## Análisis I - Práctica 3

1. (a) Dada  $f(x) = 2 - 2x + x^3$ , hallar  $f'(0)$ ,  $f'(2)$  usando la definición.  
 (b) Dada  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ , hallar  $f'(0)$ ,  $f'(1)$  usando la definición.
2. Mostrar que  $g(x) = x|x|$  es derivable para todo  $x$ , y calcular su derivada.
3. Hallar las derivadas de las funciones:
  - (a)  $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ \ln(1+x) & x \geq 0 \end{cases}$
  - (b)  $f(x) = \begin{cases} \sin(x^2 - 1) & x < -1 \\ \sqrt{x+1} & x \geq -1 \end{cases}$
4. (a) Si  $f(x) = |x|^3$ , calcular  $f'(x)$ ,  $f''(x)$  y demostrar que  $f'''(0)$  no existe.  
 (b) Definir una función que sea tres veces derivable pero que no exista la derivada cuarta en 0.
5. Determinar la pendiente de la recta tangente y hallar la ecuación de la recta tangente de las siguientes funciones en los puntos indicados:
  - (a)  $f(x) = x^3$  en  $x = 1$  y  $x = -1$ . Construir la gráfica.
  - (b)  $f(x) = \frac{1}{x}$  en  $x = 1/2$  y  $x = 1$ . Construir la gráfica.
6. (a) Hallar las coordenadas de los puntos  $P = (x_0, y_0)$  de la curva  $y = x^3 - 3x$  cuya recta tangente tenga pendiente igual a 9.  
 (b) Hallar las coordenadas de los puntos  $P = (x_0, y_0)$  de la misma curva cuya recta tangente pase por el origen.  
 (c) Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes que puedan trazarse desde el origen a la curva  $y = -4x^2 + 3x - 1$ .  
 (d) Hallar las ecuaciones de la recta tangente y de la normal a la curva  $y = 2 + x - x^3$  en el punto  $(2, -4)$ .
7. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

- (a) ¿Es  $f$  continua en todo  $\mathbb{R}$ ?
- (b) Calcular  $f'(x)$  para  $x \neq 0$ .
- (c) Analizar la existencia de las derivadas laterales y de la derivada en  $x = 0$ .

8. Sea  $f$  una función par y derivable en todo  $\mathbb{R}$ . Probar que

(a)  $f'(0) = 0$ .

(b)  $f'$  es una función impar.

¿Qué se puede concluir si  $f$  es impar?

9. Si  $f$  es derivable en un entorno de un punto  $x_0$  se la puede descomponer en la forma  $f(x) = l(x) + r(x)$  donde  $l(x)$  es una función lineal y  $r(x)$  satisface que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x-x_0} = 0$ .

Hallar esta descomposición para cada una de las siguientes  $f$  en el punto indicado:

(a)  $f(x) = x^3 - 2x - 1$  en  $x_0 = 2$ .

(b)  $f(x) = -2$  en  $x_0 = 10$ .

(c)  $f(x) = 1/x$  en  $x_0 = 1$ .

(d)  $f(x) = ax + b$  en  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

10. Calcular los incrementos y diferenciales de las funciones:

(a)  $y = 2x^2 - x$  cuando  $x = 1$ ,  $\Delta x = 0,01$ .

(b)  $y = \sin(x)$  cuando  $x = \pi/3$ ,  $\Delta x = \pi/18$ .

11. (a) Sabiendo que  $\sin(60^\circ) = \sqrt{3}/2 \simeq 0,866025$  y  $\cos(60^\circ) = 1/2$ , hallar los valores aproximados de  $\sin(60^\circ 3')$  y  $\sin(60^\circ 18')$ . (No usar calculadora).

(b) Hallar un valor aproximado de  $\tan(45^\circ 4' 30'')$ .

(c) Sabiendo que  $\log_{10}(200) \simeq 2,30103$ , hallar un valor aproximado de  $\log_{10}(200,2)$ .

(d) Usando la aproximación diferencial, encontrar un valor aproximado de  $\sqrt[3]{65}$ .

(e) Usando aproximación lineal de la función  $f(x) = \sqrt{1-x}$ , estimar los números  $\sqrt{0,9}$  y  $\sqrt{0,99}$ .

(f) Sea  $\alpha$  un número real cualquiera. Encontrar la aproximación lineal de  $(1+x)^\alpha$ , y usar este resultado para estimar  $(1,0002)^{50}$ ,  $\sqrt[3]{1,009}$  y  $\frac{1}{(1,0003)^{15}}$ .

12. Empleando el concepto de diferencial, interpretar el origen de las siguientes fórmulas aproximadas:

(a)  $\sqrt{a^2 + b} \simeq |a| + \frac{b}{2|a|}$

(b)  $\sqrt[3]{a^3 + b} \simeq a + \frac{b}{3a^2}$

donde  $|b|$  es un número pequeño respecto de  $|a|$ .

13. Verificar que se cumple el teorema de Rolle para las siguientes funciones en los intervalos indicados:

- (a)  $y = x^2 - 3x + 2$  en el segmento  $[1, 2]$ .
- (b)  $y = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$  en el segmento  $[1, 3]$ .
- (c)  $y = \sin^2(x)$  en el segmento  $[0, \pi]$ .
14. Comprobar que entre las raíces de la función  $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$  se encuentre la raíz de su derivada.
15. La función  $y = 1 - \sqrt[5]{x^4}$  se anula en los extremos del segmento  $[-1, 1]$ . Demostrar que la derivada de esta función no se hace cero en ningún punto de dicho segmento. Explicar por qué no vale el teorema de Rolle.
16. (a) Sea  $f(x) = x(x - 1)(x - 2)(x + 5)$ . Probar que  $f'(x)$  tiene exactamente tres raíces reales.
- (b) Probar que la ecuación  $3x^5 + 15x - 8 = 0$  tiene sólo una raíz real.
17. Comprobar que el Teorema de Lagrange es válido para la función  $y = 2x - x^2$  en el segmento  $[0, 1]$ .
18. Aplicar el Teorema de Cauchy a las funciones  $f(x) = x^2$  y  $g(x) = x^3$  en el segmento  $[1, 2]$  y hallar  $c$ .
19. Sean  $f$  y  $g$  funciones continuas en  $[a, b]$  y derivables en  $(a, b)$
- (a) Probar que si  $f'(x) = 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , entonces  $f(x)$  es constante.
- (b) Probar que si  $f'(x) = g'(x)$  para todo  $x \in (a, b)$ , entonces  $f(x) = g(x) + c$  donde  $c$  es una constante.
- (c) Probar que si  $f'(x) > 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , entonces  $f(x)$  es estrictamente creciente.
- (d) Análogamente si  $f'(x) < 0$  para todo  $x \in (a, b)$ , entonces  $f(x)$  es estrictamente decreciente.
20. Probar las siguientes desigualdades:
- (a)  $e^x \geq 1 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- (b)  $\sin x \leq x \quad \forall x \geq 0$
- (c)  $\sqrt{x} \geq \ln x \quad \forall x > 0$
- (d)  $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) \leq x \quad \forall x > 0$
- (e)  $1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- (f)  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
21. Dada  $f$  una función que satisface que  $f'(x) \geq x^2 - \ln x$ , probar que  $f$  es creciente en la semirrecta abierta  $(\frac{1}{2}, +\infty)$ .

22. Desarrollar:

- (a) El polinomio  $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$  en potencias de  $x - 2$
- (b) La función  $\sqrt{x}$  en potencias de  $x - 1$  de orden 3.

23. (a) Hallar el polinomio de Maclaurin de grado tres para las funciones:

- i.  $y = \ln(x + 1)^2$
- ii.  $y = e^{x+2}$

(b) Hallar el polinomio de Taylor de grado tres de  $f(x) = \tan x$  en  $a = \pi/4$ .

24. (a) Hallar el polinomio de Maclaurin de orden 2 y la expresión del resto de la función  $y = \sqrt{1+x}$

(b) Evaluar el error de la igualdad aproximada  $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$  cuando  $x = 0, 2$ .

25. (a) Hallar el polinomio de Maclaurin de grado  $n$  de la función  $y = (1+x)^\alpha$ , donde  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

(b) Calcular aproximadamente el valor de  $(1,3)^{2/3}$  con error menor que  $1/100$ .

26. Calcular:

- (a) el número  $e$  con error menor que  $1/10^4$ .
- (b)  $\cos(3^\circ)$  con error menor que  $1/10^2$ .

27. Aplicando la fórmula de Taylor, calcular los límites de las expresiones:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$
- (b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(1+x) - \sin^2(x)}{1 - e^{-x^2}}$

28. *Regla de L'Hopital*. Calcular los siguientes límites:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^n-1}$
- (b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}$
- (c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x}$
- (d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^n}$
- (e)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}$
- (f)  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$
- (g)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$