Análisis I - Práctica 4

1. Hallar los valores de x para los cuales convergen las series:

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$

   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$

   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$

   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin(\frac{x}{3^n})$

   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$

   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+1)^n$

2. Escribir los primeros cuatro términos del desarrollo en serie de potencias de x de las funciones:

   (a) $\tan(x)$

   (b) $e^{\cos(x)}$

   (c) $ln(1+e^x)$

   (d) $(1+x)^x$

3. Calcular la serie de Maclaurin de las siguientes funciones: e^x, e^{x^2}, e^{-x^2}, a^x y $\sin x$.

4. Aprovechando las fórmulas del desarrollo en serie de potencias de las funciones $e^x, \sin(x), \cos(x), \ln(1+x), (1+x)^\alpha$ desarrollar en series de potencias las siguientes funciones y determinar los radios de convergencia:

   (a) $\frac{1}{1-x}$

   (b) $\sqrt{1+x}$

   (c) $\frac{1}{10+x}$

   (d) $\frac{1}{1+x^2}$

   (e) $\cos^2(x)$

   (f) $(1+x)e^{-x}$

   (g) $\frac{1}{4-x^4}$

   (h) $\frac{e^x-1}{x}$

   (i) $\frac{1}{(1+x)^2}$

   (j) $\arctan(x)$

   (k) $\frac{x}{(1+x^2)^2}$

5. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ para $|x| < 1$. Rta: $\frac{x}{(1-x)^2}$.

6. (a) Calcular el desarrollo en serie de $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, indicando el radio de convergencia.

   (b) Comprobar que con el desarrollo anterior, se puede escribir $\ln(a)$ como una serie convergente de número racionales, cualquiera sea $a \in \mathbb{N}$. Escriba una fórmula para $\ln(5)$.

7. Calcular:

   (a) $\cos(10°)$ con error menor que 10^{-4}.

   (b) $\sin(18°)$ con error menor que 10^{-3}.

   (c) $\arctan(1/5)$ con error menor que 10^{-4}.

   (d) $\ln(5)$ con error menor que 10^{-3}.

   (e) $\sqrt{e}$ con error menor que 10^{-4}.

   (f) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ con error menor que 10^{-4}.

8. Desarrollando en serie de potencias de x integrar las siguientes ecuaciones diferenciales y definir el dominio de aplicación de la solución obtenida.

   (a) $y' + xy = 0, \quad y(0) = 0$

   (b) $y'' + xy' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

   (c) $y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
   ¿De qué función es éste el desarrollo en serie de potencias de x?

9. Encuentre los primeros cuatro términos distintos de cero del desarrollo en serie de potencias de x de las siguientes ecuaciones

   (a) $y'' = x + y^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

   (b) $y' = x^2y + y^3, \quad y(0) = 1$

   (c) $y'' = xy^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

10. Para todos los valores reales de $p > 0$, estudiar la convergencia o divergencia de las integrales:

    (a) $\int_1^{+\infty} x^p dx$

    (b) $\int_0^1 x^p dx$

    (c) $\int_0^{+\infty} x^p dx$
    Sugerencia: dividir los valores de p de la siguiente manera: $0 < p < 1, p = 1$ y $p > 1$.

11. Analizar la convergencia de las siguientes integrales:

    (a) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

    (b) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^2(x)}$

    (c) $\int_0^{+\infty} e^{-kx} dx$

    (d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6} dx$

    (e) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} dx$

    (f) $\int_{-1}^{3} \frac{dx}{(1-x)^3} dx$

    (g) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2x) dx$

    (h) $\int_0^4 \frac{x}{x^2-4} dx$

    (i) $\int_0^1 (\ln x)^2 dx$

    (j) $\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x} dx$

    (k) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} dx$

12. Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

    (a) Si $f(x)$ es una función continua y positiva tal que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a > 0$, entonces $\int_0^{+\infty} f(x)dx = +\infty$.

    (b) Si $f(x)$ es una función continua y positiva tal que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a > 0$, entonces $\int_0^{-\infty} f(x)dx = -\infty$.

    (c) Si $f(x)$ es una función continua y decreciente con $\int_4^{+\infty} f(x)dx = 3$, entonces $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

    (d) Si $f(x)$ es una función continua y positiva con $\int_4^{+\infty} f(x)dx = 8$, entonces $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

    (e) Si $f(x)$ es una función continua y positiva tal que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, entonces $\int_0^{+\infty} f(x)dx < +\infty$.