Análisis I - Práctica 5

1. Dado $x \in \mathbb{R}^n$ se define $||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

   (a) Pruebe que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se verifican las siguientes desigualdades:

      i. $|x_i| \leq ||x|| \quad \forall i = 1, ..., n$

      ii. $||x||^2 \leq n \cdot (\max\{|x_i| : i = 1, ..., n\})^2$

      iii. $\max |x_i| \leq ||x|| \leq \sqrt{n} \max |x_i|$.
      Describa geométricamente esta doble desiguadad.

   (b) Usando a) concluya que:

   $$\left\{x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{n} \max |x_i| < r\right\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| < r\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \max |x_i| < r\}$$

   (c) Pruebe que son equivalentes para $A \subset \mathbb{R}^n$:

      i. A es abierto.

      ii. $\forall y \in A, \exists r > 0 / \{x \in \mathbb{R}^n : \max |x_i - y_i| < r\} \subseteq A$

2. (a) Pruebe que los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son abiertos

      i. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 7\}$

      ii. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y > 1\}$

      iii. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ ó } y \neq 0\}$

   (b) Dé un ejemplo de un conjunto en $\mathbb{R}^3$ que no sea ni abierto ni cerrado.

3. Para cada uno de los siguientes conjuntos $A \subset \mathbb{R}^3$, calcule $Fr(A)$, $\bar{A}$, $\bar{A} - A$ y $A - Fr(A)$:

   (a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

   (b) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \text{ y } z < 2\}$

   (c) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \text{ y } x^2 + y^2 + (z + 1)^2 < 1\}$

   (d) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \text{ y } x^2 + y^2 < 1/2\}$

4. Determine cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son cerrados y acotados:

   (a) $K_1 = B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$

   (b) $K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$

   (c) $K_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y > 0\}$

   (d) $K_4 = \left\{(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\right\}$

   (e) $K_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } y = 0\}$

5. En cada caso encuentre una sucesión de puntos de A tal que ninguna subsucesión converja a un punto de A:

   (a) $A = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$
   (b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y > 0\}$

6. Dé el dominio de definición para cada una de las siguientes funciones y grafiquelo:

   (a) $f(x, y) = \ln\{(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)\}$
   (b) $f(x, y) = \sqrt{6 - (2x + 3y)}$
   (c) $f(x, y) = \frac{1}{x}$
   (d) $f(x, y) = x^y$
   (e) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \sqrt{y - x^2}$
   (f) $f(x, y) = \frac{\ln(1-y+x^2)}{\sin(x)}$
   (g) $f(x, y) = \int_x^y \frac{1}{1+t^2} dt$
   (h) $f(x, y) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-x^2+y^2}}$
   (i) $f(x, y) = \frac{\sin(x^2 y)}{\ln(1-x^2)}$

7. Encuentre las curvas de nivel de las siguientes funciones:

   (a) $z = x + y$
   (b) $z = x^2 + y^2$
   (c) $z = \sqrt{x \cdot y}$
   (d) $z = \frac{y}{x^2}$
   (e) $z = x^2 - y^2$

8. Estudie las superficies de $\mathbb{R}^3$ representadas por las siguientes ecuaciones y diga cuáles de estas superficies son la gráfica de una función $z = f(x, y)$

   (a) $z = 2x^2 + y^2$
   (b) $z^2 = 1 - x^2 - \frac{y^2}{2}$
   (c) $z = \frac{1}{x^2+y^2}$
   (d) $3x + 2y - z = 0$
   (e) $z = x^2y^2 + 1$
   (f) $z^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} - 2$
   (g) $6x^2 + y^2 - z^2 = 1$

(h) $z = \frac{y}{\sqrt{x}}, x > 0$

9. Encuentre las superficies de nivel de las siguientes funciones:

   (a) $u = x + y + z$
   (b) $u = x^2 + y^2 - z^2$
   (c) $u = x^2 + y^2 + z^2$
   (d) $u = x^2 + 2y^2$

10. (a) Usando sólo la definición de límite demuestre que:
      i. $\lim_{(x,y)\to(1,0)} x + y = 1$
      ii. $\lim_{(x,y)\to(-1,8)} x \cdot y = -8$

    (b) Para cada $\varepsilon = 1, \varepsilon = 1/100, \varepsilon = \alpha^2$ encuentre $\delta > 0$ tal que

$$\|(x,y) - (-1,8)\| < \delta \Longrightarrow |x \cdot y + 8| < \varepsilon$$

11. Pruebe que:

    (a) $\lim_{(x,y)\to(7,2)} x^2 + y^2 - xy = 39$
    (b) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} xe^{xy} = 0$
    (c) $\lim_{(x,y)\to(0,3)} \frac{y^2+\cos(\pi - x)}{y} = \frac{8}{3}$
    (d) $\lim_{(x,y)\to(0,3)} \sin(x \cdot \cos y) = 0$
    (e) $\lim_{(x,y)\to(c,0)} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 - y^2} = 0$ con $c \neq 0$
    (f) $\lim_{(x,y)\to(0,1)} ye^x = 1$

12. (a) Sea $f : B_r(a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = 0$. Pruebe que:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\sin(f(x,y))}{f(x,y)} = 1$$

    (b) Sea $f : B_r(a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = +\infty$. Pruebe que:

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} \frac{\ln(f(x,y))}{f(x,y)} = 0$$

    (c) Calcule:
      i. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$
      ii. $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}$
      iii. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$

13. Analice la existencia de los límites restringido a los ejes coordenados y del límite doble de las siguientes funciones en el origen:

    (a) $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$

    (b) $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

    (c) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2}$

    (d) $f(x,y) = \frac{\sin x}{y}$

    (e) $f(x,y) = |x|^y$

    (f) $f(x,y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{xy+y-x}$

    (g) $f(x,y) = \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$

    (h) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{x^2y^2}$

    (i) $f(x,y) = \frac{x^2y^2-x^2+1}{x^2-y^2}$

    (j) $f(x,y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

    (k) $f(x,y) = \frac{xy}{|x|+|y|}$

    (l) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$

    (m) $f(x,y) = x\sin(\frac{\pi}{y}) + y\sin(\frac{\pi}{x})$

    (n) $f(x,y) = \sin(\frac{x}{y})$

    (o) $f(x,y) = \frac{e^{x(y+1)}-x-1}{|x-y|}$

14. Demuestre que las siguientes funciones tienden a cero si (x,y) se aproxima al origen a lo largo de cualquier recta, pero para ninguna de ellas existe el límite cuando $(x,y) \to (0,0)$

    (a) $f(x,y) = \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$

    (b) $f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2-x}$

    (c) $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$

15. Estudie la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados

    (a) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ en $(1,0)$ y $(0,0)$

    (b) $f(x,y) = \begin{cases} |y|^x\,(1+x)^y & (x,y) \neq (0,0) \text{ y } x > -1 \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ en $(1,0)$ y $(0,2)$

    (c) $f(x,y) = \sin(x\cos y)$ en $(1,1)$ y $(0,2)$

(d) $f(x,y) = \begin{cases} x+y & x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases}$ en $(0,0)$ y $(1,1)$

(e) $f(x,y) = \begin{cases} 1 & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases}$ en $(1,0)$ y $(-1,2)$

16. Dada la función $f(x,y) = x \cdot y \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{1}{y}\right)$

    (a) Calcular su dominio

    (b) Definirla si es posible en $\mathbb{R}^2 \backslash \mathrm{Dom}(f)$ de modo que resulte continua en todo $\mathbb{R}^2$.

17. Encuentre los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

    (a) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$

    (b) $f(x,y) = \frac{1}{1-x^2-y^2}$

    (c) $f(x,y) = |y|$

    (d) $f(x,y) = \frac{\sin(xy)}{x-y}$

    (e) $f(x,y) = \frac{xy+1}{x^2-y}$

    (f) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

18. Demuestre que la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

    es continua respecto de cada una de las variables por separado pero no lo es como función de ambas.

19. Estudie la continuidad de las siguientes funciones:

    (a) $f(x,y) = (x^2, e^x)$

    (b) $f(x,y) = \left(\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}\right)$

20. Sea $f : \{(x,y)/x \neq 0\} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\sin(xe^y)}{2x}$$

    Calcule $\lim_{(x,y)\to(0,b)} f(x,y)$, donde b es cualquier número real.

21. (a) Sea $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = \frac{1}{1-||(x,y)||}$. Pruebe que f es continua y no es acotada.

(b) Sea $g : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $g(x,y) = ||(x,y)||$. Pruebe que g es continua y acotada pero no alcanza su máximo en $B_1(0)$.

22. Sea $f(x,y) = \frac{\sin(x^2y)}{\ln(1-x^2)}$

(a) Encuentre el dominio D de f y grafiquelo.

(b) Dado $q = (q_1, q_2) \in Fr(D)$. Existe $\lim_{(x,y)\to(q_1,q_2)} f(x,y)$?