Análisis I - Práctica 7

1. Calcule las derivadas parciales de segundo orden para las siguientes funciones, verificando la igualdad de las derivadas parciales mixtas para aquellas funciones de clase C^2:

   (a) $f(x,y) = x^3y + e^{xy^2}$

   (b) $f(x,y,z) = ye^z + \frac{e^y}{x} + xy\sin(z)$

   (c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} + \ln(z)$

   (d) $f(x,y) = x^2e^{\frac{y}{x}} + y^2$

   (e) $f(x,y) = \arctan(x^3 - 2xy)$

2. Calcule todas las derivadas de tercer orden para las siguientes funciones:

   (a) $f(x,y,z) = xyz$

   (b) $f(x,y,z) = e^{xyz}$

   (c) $f(x,y,z) = \cos(x^2+y) - \sin(y^2z)$

   (d) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1}$

3. Pruebe que si f es $C^3(\mathbb{R}^3)$ entonces:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$$

   ¿Cuáles otras son iguales?

4. Supongamos que f es de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$ y que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \ \forall (x,y)$. Probar que

$$f(x,y) = g(x) + h(y)$$

5. (a) Encuentre todas las funciones f tales que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \equiv 0$ en $\mathbb{R}^3 \ \forall i,j = 1,2,3$.

   (b) Encuentre todas las funciones f tales que

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} \equiv 0 \ \forall \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) : |\alpha| = k (k \in \mathbb{N}, \text{fijo})$$

6. Sean $f(x,y) = \cos(xy), x(u,v) = u+v, y(u,v) = u-v$. Calcule $\frac{\partial^2}{\partial u^2} f\left(x(u,v), y(u,v)\right)$ y $\frac{\partial^3}{\partial u \partial y^2} f\left(x(u,v), y(u,v)\right)$

   (a) Sustituyendo

   (b) Usando la regla de la cadena.

7. *Laplaciano - Función armónica*

   Se dice que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2 satisface la ecuación de Laplace o bien que es una función armónica en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ si:

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \nabla^2 f \equiv 0 \text{ en } U$$

   Verifique que las siguientes funciones son armónicas en $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto. Determine U en cada caso:

   (a) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$
   (b) $f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$
   (c) $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
   (d) $f(x, y, z) = e^{3x+4} \cos(5z) + 4y$

8. Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = g(||x||)$. Demuestre que:

$$\triangle f(x) = \frac{d^2 g}{dt}(||x||) + \frac{2}{||x||}\frac{dg}{dt}(||x||)$$

9. Sean f, g dos funciones C^2 definidas en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y tales que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

   Pruebe que f y g son armónicas en U.

10. Calcule la fórmula de Taylor de segundo orden para las funciones dadas en el punto indicado. Escriba la forma de Lagrange del residuo.

    (a) $f(x, y) = (x + y)^2$ en $(0, 0)$
    (b) $f(x, y) = e^{x+y}$ en $(0, 0)$
    (c) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ en $(0, 0)$
    (d) $f(x, y) = e^{(x-1)^2} \cos(y)$ en $(1, 0)$
    (e) $f(x, y) = \sin(xy)$ en $(1, \pi)$
    (f) $f(x, y) = e^x \sin(y)$ en $(2, \frac{\pi}{4})$
    (g) $f(x, y) = \ln(1 + xy)$ en $(2, 3)$
    (h) $f(x, y) = x + xy + 2y$ en $(1, 1)$
    (i) $f(x, y) = x^y$ en $(1, 2)$
    (j) $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} + \sqrt[3]{z}$ en $(2, 3, 4)$

11. Utilizando los resultados anteriores calcule $(0.95)^{2.01}$

    (a) con error menor que $1/500$

    (b) con error menor que $1/5000$

12. Obtenga la fórmula aproximada

$$\frac{\cos x}{\cos y} = 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

    para valores suficientemente pequeños de $|x|, |y|$.

13. (a) Calcule el polinomio de Taylor de grado 1 centrado en $(1,1)$ de la función $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$

    (b) Use la parte a) para evaluar $e^{\frac{4}{10}}$ usando que $\frac{4}{10} = (1+\frac{1}{10})^2 - (1-\frac{1}{10})^2$. Compruebe que el error que cometió es menor que 0.003

14. Calcule el polinomio de segundo grado que mejor aproxima en el origen a la función $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$.

15. Encuentre los puntos críticos de las siguientes funciones y verifique que son puntos de ensilladura:

    (a) $f(x,y) = x^2 - y^2$

    (b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x$

    (c) $f(x,y) = xy$

    (d) $f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2 y}} & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad xy = 0 \end{cases}$

    En cada caso analice si puede haber extremos que no sean puntos críticos. Si los hay, encuéntrelos.

16. (a) Calcule los extremos de $f(x,y) = x^2 + y^4$ y de $g(x,y) = x^4 + y^4$ y sus hessianos en dichos puntos.

    (b) Sea f de clase C^2 tal que tiene un extremo estricto en $a \in \mathbb{R}^n$. ¿Es necesariamente $Hf(a)$ definida positiva o negativa?

17. Sea $f(x,y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$. Pruebe que:

    (a) $(0,0)$ es un punto de ensilladura.

    (b) $D(Hf(0,0)) = 0$.

    (c) f tiene un mínimo relativo en $(0,0)$ sobre cada recta que pase por $(0,0)$, es decir, si $g(t) = (at, bt)$ entonces $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un mínimo relativo en 0 para cada elección de a, b.

18. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$

    (a) Pruebe que $(0, 0)$ es un punto crítico pero no extremo.

    (b) Pruebe que $\pm\sqrt{2}(1, -1)$ son mínimos absolutos.

    (c) ¿Hay máximos relativos?

19. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2 no lineal tal que $Df(x_0) \neq 0$. Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(x) = f(x) - Df(x_0)(x)$$

    (a) Demuestre que x_0 es un punto crítico de g.

    (b) Pruebe que $Hf(x_0) = Hg(x_0)$.

    (c) ¿Qué pasaría con $g(x) = f(x) - Df(x_0)(x - x_0)$?

20. Para las siguientes funciones, encuentre los puntos críticos y analice cuáles son máximos, mínimos locales o puntos de ensilladura:

    (a) $f(x, y) = (2x + 1 - y)^2$

    (b) $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y + 1$

    (c) $f(x, y) = 10x^2 + 10y^2 + 12xy + 2x + 6y + 1$

    (d) $f(x, y) = e^{1+x^2+y^2}$

    (e) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + xy$

    (f) $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 2y + 1$

    (g) $f(x) = \frac{1}{1+||x||^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n$

    (h) $f(x, y) = (x - y)^2 + 1 + 2(x - y)$

    (i) $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$

    (j) $f(x, y, z, u, v) = 2xy + 2xz + 2xu + 2xv + 2yz + 2yu + 2yv + 2zu + 2zv + 2uv + 2x - 3y + 5z$

    (k) $f(x, y, z, u, v, w) = x^2 + y^2 + 2z^2 + u^2 + 2v^2 + 2w^2 + 2xy + 6xz + 2xu + 4xv + 6xw + 2yu + 4yv + 2zu + 4zw + 4uv + x - y + 26w$

    (l) $f(x, y, z, w) = x^2 + 2xy + 6xz + 2xw - 5y^2 - 10yz - 10yw - z^2 + 3w^2$

21. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que:

$$f(0, 1) = 0, \nabla f(0, 1) = (0, 2) \text{ y } Hf(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

    Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definida por $g(x, y) = 3x^2y + e^{f(x,y)} - 2y$

(a) Calcule $Hg(0,1)$

(b) ¿Tiene g un extremo relativo en $(0,1)$?

22. Decida si existen o no, números reales a y b tales que la función

$$f(x,y) = e^{y^4-x^2} + a(x-y) + b(x-2)(y-1)$$

tenga un mínimo relativo en el punto $(2,1)$.

23. Encuentre curvas $\sigma(t)$ que representen los siguientes conjuntos o trayectorias

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y = e^x\}$

(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 4x^2 + y^2 = 1\}$

(c) Una línea recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por el origen y el punto (a,b)

(d) El segmento que une el punto $(1,0)$ con $(1,2)$.

(e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 9x^2 + 16y^2 = 4\}$

24. Determine los extremos absolutos de $f|_A$ en los siguientes casos:

(a) $f(x,y) = xy(x-y)^2 \qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\}$

(b) $f(x,y) = xy(x-y)^2 \qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\}$

(c) $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x \qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, |x| \leq 3, |y| \leq 3\}$

(d) $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3 \qquad A = \mathbb{R}^2$

(e) $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3 \qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$

25. Se tiene en el plano un cuadrado cerrado (incluyendo el interior) A de vértices $\{(-1,0),(1,0),(1,-2),(-1,-2)\}$.

Encuentre los extremos absolutos de la función $f(x,y) = 2x - y^2$ en el recinto B, donde B es el recinto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 1\} \cap A$.

26. Encuentre el punto de la parábola $y^2 = 4x$ cuya distancia al $(1,0)$ es mínima

(a) Usando multiplicadores de Lagrange

(b) Reduciéndolo a trabajar con una función de una variable.

27. Encuentre los máximos y mínimos de $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1$ dentro del círculo unitario y en el borde.

28. Encuentre los máximos y mínimos de $f(x,y) = y + x - 2xy$ en el interior y en el borde de $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, |x| \leq \frac{1}{2}\right\}$.

29. Encuentre los extremos de f sujetos a las restricciones mencionadas:

(a) $f(x,y,z) = x - y + z \qquad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$

(b) $f(x,y) = \sin(xy) \qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 2y^2 = 1\}$

(c) $f(x,y) = xy \qquad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{|xy|}{|xy|+1} \leq 1\right\}$

(d) $f(x,y,z) = x + y + z \qquad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - y^2 = 1, 2x + z = 1\}$

30. Resuelva los siguientes problemas geométricos mediante el método de Lagrange:

    (a) Encontrar la distancia más corta desde el punto $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ hasta el plano de ecuación $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ donde $(b_1, b_2, b_3) \neq (0,0,0)$.

    (b) Encontrar el punto sobre la recta de intersección de los dos planos $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0$ y $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ que esté más cerca del origen.

    (c) Mostrar que el volumen del mayor paralelepípedo rectangular que puede inscribirse en el elipsoide

    $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

    es $8abc/3\sqrt{3}$.

31. Encuentre la distancia mínima entre la parábola $y = x^2$ y la recta $x - y - 2 = 0$.

32. Encuentre el punto de la superficie $z = xy - 1$ más cercano al origen.

33. Siendo A, B, C tres ángulos positivos tales que $A + B + C = \pi/2$, demuestre que siempre se cumple

    $$\sin(A)\sin(B)\sin(C) \leq \frac{1}{8}$$

34. Un envase cilíndrico debe tener capacidad de un litro. ¿Cómo debe diseñarse el envase para minimizar el material empleado?

35. Encuentre los puntos más lejanos y cercanos al punto $(0,0,2)$ de la esfera de ecuación

    $$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$$