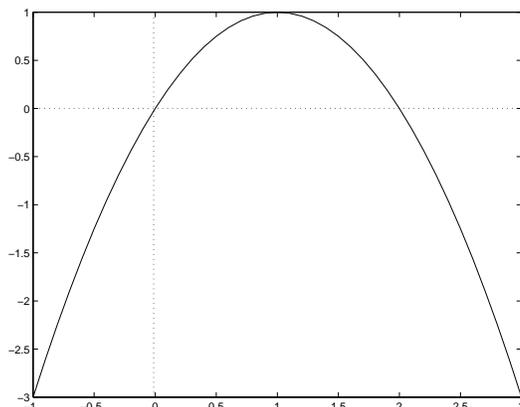


Análisis I - Práctica 2

1. Dado el gráfico de $f(x)$:



trazar el gráfico de : $f(x - 3)$, $f(2x)$, $f(x) - 3$, $2f(x)$, $-f(x)$, $f(-x)$, $|f(x)|$.

2. Graficar:

(a) $\sin(x)$, $3\sin(x)$, $\sin(3x)$.

(b) $\sin(x + \pi)$, $\sin(x + 2\pi)$.

3. Graficar e^x , e^{-x} , $-e^x$ y $-e^{-x}$.

4. Construir las gráficas de las siguientes funciones:

(a) $f(x) = \begin{cases} 1 + x & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 - 2x & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ en el segmento $[-1, 1]$

(b) $f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ en el segmento $[0, 2]$

5. Usando la propiedad del gráfico de funciones inversas, graficar $\ln(x)$.

6. (a) Dada $\phi(x) = \frac{x-1}{3x+5}$, escribir las expresiones $\phi\left(\frac{1}{x}\right)$ y $\frac{1}{\phi(x)}$.

(b) Dada $\Psi(x) = \sqrt{x^2 + 4}$, escribir las expresiones $\Psi(2x)$ y $\Psi(0)$.

(c) Dadas $f(x) = \ln(x)$ y $g(x) = x^3$, hallar $f(g(2))$, $f(g(x))$, $g(f(x))$.

7. Hallar el dominio natural de las siguientes funciones:

(a) $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(b) $f_1(x) = \sqrt{2 + 3x - x^2}$

(c) $f_1(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{2x}$

(d) $f_1(x) = \frac{\ln(1+4x)}{x}$

(e) $f_1(x) = \frac{\sin(\sqrt[3]{x-6}-\sqrt{x})}{x^3+8}$

8. Demostrar usando sólo la definición que:

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) = 0$

(b) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a} \quad (a \geq 0)$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = 1$

(d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{2}{3}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\sqrt{x})}{x} = +\infty$

(f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-2}{2x^2-3} = \frac{1}{2}$

(g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-4}{x+6} = +\infty$

9. Para cada una de las siguientes funciones:

$$f_1(x) = \frac{1}{2} \sin^2(x) \quad f_2(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad f_3(x) = \begin{cases} \cos(\pi x/2) & |x| \leq 1 \\ |x-1| & |x| > 1 \end{cases}$$

$$f_4(x) = [x] \sin(\pi x) \quad f_5(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ x^2 + 1 & x \leq 0 \end{cases} \quad f_6(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x < 0 \\ -x^2 + \frac{5}{2}x & x > 1 \end{cases}$$

$$f_7(x) = x^2 - [x^2] \quad f_8(x) = x \arctan\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1}\right) \quad f_9(x) = \begin{cases} \frac{\sin(e^2 x)}{x} & x < 0 \\ (1+2x)^{1/x} & 0 < x < 1 \\ \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} & x > 1 \end{cases}$$

- (a) Calcular su dominio natural.
- (b) Estudiar la continuidad en cada punto de su dominio. En los puntos de discontinuidad, indicar de qué tipo se trata.
- (c) En los puntos que no pertenezcan al dominio, definirla (si es posible) de modo que resulte continua.

10. Calcular

(a) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x^2]-[x]^2}{x^2-9}$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin(x)$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^3 + 3) - \ln(x^2 + 2)$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \cos x}{e^x + \ln x}$

11. (a) Sean $n \leq x < n + 1$. Probar la siguiente desigualdad:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x > \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$$

- (b) Usando el ítem a), probar que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

12. Calcular los límites:

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\alpha x)}{x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/\tan x}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x}$

13. Sea $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ y $g(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$ polinomios de grado n y m respectivamente. Suponer que $a_n, b_m > 0$ e investigar el límite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

para los casos $n > m, n = m, n < m$. Analizar qué pasa cuando se tiene $\lim_{x \rightarrow -\infty}$.

14. Calcular:

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3 + 2x - 1}{2x^3 + 5}$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2}{5x^3 - 3x^2 + x - 9}$

(c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^5 + x^3 - 4}{-8x^4 + 6x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^m}{x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0}$

15. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Mostrar que $|f|$ es continua. ¿Vale la recíproca?

16. (a) Demostrar que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x > M$

$$10^{-(10^{10})} x^2 - 10^{10^{10}} > 10^{10^{10}} x + 10^{10^{10}}$$

- (b) Encontrar el mínimo M tal que vale a).

17. Sea f una función continua tal que $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{Q}$.

- (a) Calcular $f(\sqrt{2})$.
 (b) Calcular $\text{Im}(f)$.
18. (a) Hallar todas las $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continuas tales que $(f(x))^2 - e^x = 0$.
 (b) Demostrar que la ecuación $x2^x = 1$ tiene al menos una raíz positiva y menor o igual que 1.
 (c) Demostrar que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y verifica

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

entonces debe ser suryectiva.

- (d) Sea $f(x) = 3x^7 - 4x^6 - 5x^5 + 3x^4 - \sin x$. Calcular $\text{Im}(f)$.
 (e) Probar que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $f(x) \in \mathbb{Q}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces debe ser constante.
 (f) Probar que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real.
19. Sea $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \text{sen}(x)$.

- (a) Probar que existen sucesiones $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_{>0}$ tales que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) = -\infty.$$

- (b) Probar que $\text{Im}(f) = \mathbb{R}$.

20. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{|x|+2} \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x} \right)$. Probar que:

- (a) f es discontinua en $x = 0$.
 (b) f es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
 (c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ y $|f(x)| < 1$.
 (d) $\text{Im}(f) = (-1, 1)$.

21. Sea f continua y estrictamente creciente en la semirecta $[a, +\infty)$ y tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = M$. Probar que $\text{Im}(f) = [f(a), M)$.

Mostrar con un ejemplo que si sólo se pide que f sea creciente, entonces puede ser $\text{Im}(f) \neq [f(a), M)$.

22. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ estrictamente creciente y continua tal que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = c \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = d$$

Probar:

- (a) $Im(f) = (c, d)$.
 - (b) Existe $f^{-1} : (c, d) \rightarrow (a, b)$ y es continua.
 - (c) $\lim_{x \rightarrow c^+} f^{-1}(x) = a$ y $\lim_{x \rightarrow d^-} f^{-1}(x) = b$.
 - (d) Encontrar contraejemplos si
 - i. f no es creciente.
 - ii. f no es continua.
23. Sea $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ continua y sean $T = \sup_{x \in (a, b)} f(x)$ y $B = \inf_{x \in (a, b)} f(x)$. Demostrar que $(B, T) \subseteq Im(f)$.
24. Sea D un subconjunto denso en (a, b) y sean f y g funciones continuas en (a, b) tales que $f \equiv g$ en D . Probar que $f \equiv g$ en (a, b) .
25. (a) Probar que existe $x \in (1, 2)$ tal que $x^3 - 3x + 1 = 0$.
- (b) Probar que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x = x$.
- (c) Encontrar un número r tal que el polinomio $x^9 - 100x^4 + 3x^3 + 12$ tenga al menos una raíz en el intervalo $(-r, r)$.
26. Si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones continuas, distintas de cero en todo punto, tales que $|f(x)| = |g(x)|$ para todo $x \in [a, b]$ y existe un punto $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$, probar que $f \equiv g$ en $[a, b]$.
27. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $Im(f) = [a, b] \cup [c, d]$ con $a < b < c < d$. ¿Es f continua?
28. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(ax) = af(x)$ para todo $x, a \in \mathbb{R}$. Mostrar que f es continua. Más aún, caracterizar a todas las funciones con esa propiedad.
29. Sea $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$
- (a) Calcular el dominio de definición de f .
 - (b) ¿Para qué valores de x resulta f continua?