Nombre y Apellido: ....

Libreta: .... Carrera: ....

Análisis I — Examen final
Segundo Cuatrimestre de 2005

1	2	3	4	5

1. Probar que toda función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ es acotada.
2. Sea B una bola abierta alrededor del punto (x_0, y_0) tal que para todo $(x, y) \in B$ existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ y son continuas en (x_0, y_0). Probar que entonces f es diferenciable en (x_0, y_0).
3. Sea (a_n) una sucesión de términos positivos y $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.
   a) Probar que si $a > 0$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.
   b) ¿Qué pasa si $a = 0$?
4. a) Probar que para todo $k \in \mathbb{N}$, $e^x > \dfrac{x^k}{k!}$, $\forall x > 0$.
   b) Probar que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n e^{1/x} = +\infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x|x - y|, \sqrt{x^2 + y^2})$. Determinar el conjunto de puntos de $\mathbb{R}^2$ donde f es diferenciable.

Nota: Para aprobar se debe resolver correctamente al menos uno de los dos primeros ejercicios, y uno de los tres últimos.
Justificar todas las respuestas.