Nombre y Apellido: ....

Libreta: .... Carrera: ....

Análisis I — Examen final

24 de febrero de 2006

1	2	3	4	5

1. Teorema de Rolle: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y derivable en (a,b). Probar que si $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.

2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^3$. Supongamos que $\nabla f(x_0, y_0) = 0$ y el Hessiano de f en (x_0, y_0) es definido positivo. Probar que f tiene un mínimo relativo en (x_0, y_0).

3. Sea (a_n) una sucesión acotada. Se define la sucesión (b_n) por $b_n = \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$.

   a) Probar que (b_n) converge (**Sug**: mostrar que (b_n) es monótona y acotada).

   b) Si (a_n) converge, probar que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $(0,0)$, y constante sobre la curva $y = x + x^2$. Probar que $\nabla f(0,0)$ es ortogonal al vector $(1,1)$.

5. Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua en $(0,0)$ y $f(x,y) = x \cdot g(x,y)$.

   a) Probar que existen las derivadas parciales de f en $(0,0)$.

   b) Probar que f es diferenciable en $(0,0)$.

Nota: Para aprobar se debe resolver correctamente al menos uno de los dos primeros ejercicios, y uno de los tres últimos.

Justificar todas las respuestas.