Nombre y Apellido: ....

Libreta: .... Carrera: ....

Análisis I — Examen final

3 de marzo de 2006

1	2	3	4	5

1. (Criterio de Cauchy) Sea (a_n) una sucesión de términos positivos y $\ell = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Probar que si $\ell < 1$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, y si $\ell > 1$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

2. Probar que si una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es diferenciable en (x_0, y_0) entonces es continua en (x_0, y_0).

3. Sea (a_n) una sucesión de términos positivos tal que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. Analizar la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + a_n)$. ¿Qué sucede si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge?

4. Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable, tal que $g'(0) \neq 0$. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se define por $f(x, y) = g(x^2 + 2y^2)$, probar que f tiene un extremo en $(0, 0)$. ¿En qué caso f tiene un máximo en $(0, 0)$?

5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

   Probar que f es de clase $\mathcal{C}^1$.

Nota: Para aprobar se debe resolver correctamente al menos uno de los dos primeros ejercicios y uno de los tres últimos.
Justificar todas las respuestas.