Análisis 1

Segundo Cuatrimestre 2005

Práctica 3

(1) (a) Dada $f(x) = 2 - 2x + x^3$, hallar $f^{'}(0), f^{'}(2)$ usando la definición.
(b) Dada $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, hallar $f^{'}(0), f^{'}(1)$ usando la definición.

(2) Mostrar que $g(x) = x\,|x|$ es derivable para todo x, y calcular su derivada.

(3) Hallar las derivadas de las funciones:
(a) $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ \ln(1+x) & x \geq 0 \end{cases}$
(b) $f(x) = \begin{cases} \sin(x^2-1) & x < -1 \\ \sqrt{x+1} & x \geq -1 \end{cases}$

(4) (a) Si $f(x) = |x|^3$, calcular $f^{'}(x)$, $f^{''}(x)$ y demostrar que $f^{'''}(0)$ no existe.
(b) Definir una función que sea tres veces derivable pero que no exista la derivada cuarta en 0.

(5) Determinar la pendiente de la recta tangente y hallar la ecuación de la recta tangente de las siguientes funciones en los puntos indicados:
(a) $f(x) = x^3$ en $x = 1$ y $x = -1$. Construir la gráfica.
(b) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 1/2$ y $x = 1$. Construir la gráfica.

(6) (a) Hallar las coordenadas de los puntos $P = (x_0, y_0)$ de la curva $y = x^3 - 3x$ cuya recta tangente tenga pendiente igual a 9.
(b) Hallar las coordenadas de los puntos $P = (x_0, y_0)$ de la misma curva cuya recta tangente pase por el origen.
(c) Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes que puedan trazarse desde el origen a la curva $y = -4x^2 + 3x - 1$.
(d) Hallar las ecuaciones de la recta tangente y de la normal a la curva $y = 2 + x - x^3$ en el punto $(2, -4)$.

(7) Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

(a) ¿Es f continua en todo $\mathbb{R}$?
(b) Calcular $f^{'}(x)$ para $x \neq 0$.
(c) Analizar la existencia de las derivadas laterales y de la derivada en $x = 0$.

(8) Sea f una función par y derivable en todo $\mathbb{R}$. Probar que
(a) $f^{'}(0) = 0$.
(b) $f^{'}$ es una función impar.
¿Qué se puede concluir si f es impar?

(9) Si f es derivable en un entorno de un punto x_0 se la puede descomponer en la forma $f(x) = l(x) + r(x)$ donde $l(x)$ es una función lineal y $r(x)$ satisface que $\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$.

Hallar esta descomposición para cada una de las siguientes f en el punto indicado:
(a) $f(x) = x^3 - 2x - 1$ en $x_0 = 2$.
(b) $f(x) = -2$ en $x_0 = 10$.
(c) $f(x) = 1/x$ en $x_0 = 1$.
(d) $f(x) = ax + b$ en $x_0 \in \mathbb{R}$.

(10) Calcular los incrementos y diferenciales de las funciones:
(a) $y = 2x^2 - x$ cuando $x = 1, \Delta x = 0,01$.
(b) $y = \sin(x)$ cuando $x = \pi/3, \Delta x = \pi/18$.

(11) (a) Sabiendo que $\sin(60°) = \sqrt{3/2} \simeq 0,866025$ y $\cos(60°) = 1/2$, hallar los valores aproximados de $\sin(60°3')$ y $\sin(60°18')$. (No usar calculadora).
(b) Hallar un valor aproximado de $\tan(45°4'30")$.
(c) Sabiendo que $\log_{10}(200) \simeq 2,30103$, hallar un valor aproximado de $\log_{10}(200,2)$.
(d) Usando la aproximación diferencial, encontrar un valor aproximado de $\sqrt[3]{65}$.
(e) Usando aproximación lineal de la función $f(x) = \sqrt{1-x}$, estimar los números $\sqrt{0,9}$ y $\sqrt{0,99}$.
(f) Sea α un número real cualquiera. Encontrar la aproximación lineal de $(1+x)^\alpha$, y usar este resultado para estimar $(1,0002)^{50}$, $\sqrt[3]{1,009}$ y $\frac{1}{(1,0003)^{15}}$.

(12) Empleando el concepto de diferencial, interpretar el origen de las siguientes fórmulas aproximadas:
(a) $\sqrt{a^2+b} \simeq |a| + \frac{b}{2|a|}$
(b) $\sqrt[3]{a^3+b} \simeq a + \frac{b}{3a^2}$
donde $|b|$ es un número pequeño respecto de $|a|$.

(13) Verificar que se cumple el teorema de Rolle para las siguientes funciones en los intervalos indicados:
(a) $y = x^2 - 3x + 2$ en el segmento $[1, 2]$.
(b) $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ en el segmento $[1, 3]$.
(c) $y = \sin^2(x)$ en el segmento $[0, \pi]$.

(14) Comprobar que entre las raíces de la función $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$ se encuentre la raíz de su derivada.

(15) La función $y = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ se anula en los extremos del segmento $[-1, 1]$. Demostrar que la derivada de esta función no se hace cero en ningún punto de dicho segmento. Explicar por qué no vale el teorema de Rolle.

(16) (a) Sea $f(x) = x(x-1)(x-2)(x+5)$. Probar que $f'(x)$ tiene exactamente tres raíces reales.
(b) Probar que la ecuación $3x^5 + 15x - 8 = 0$ tiene sólo una raíz real.
(c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida para un $a \in \mathbb{R}$ fijo:

$$f(x) = e^{a^2 x} + x^3 + x$$

probar que $f(x) = 0$ tiene exactamente una solución en el intervalo $[-1, 0]$.

(17) Comprobar que el Teorema de Lagrange es válido para la función $y = 2x - x^2$ en el segmento $[0, 1]$.

(18) Aplicar el Teorema de Cauchy a las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ en el segmento $[1, 2]$ y hallar c.

(19) Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b)
(a) Probar que si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces $f(x)$ es constante.
(b) Probar que si $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, entonces $f(x) = g(x) + c$ donde c es una constante.
(c) Probar que si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces $f(x)$ es estrictamente creciente.
(d) Análogamente si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces $f(x)$ es estrictamente decreciente.

(20) Probar las siguientes desigualdades:
(a) $e^x \geq 1 + x \ \forall x \in \mathbb{R}$
(b) $\sin x \leq x \ \forall x \geq 0$
(c) $\sqrt{x} \geq \ln x \ \forall x > 0$

(d) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) \leq x \ \forall x > 0$
(e) $1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2} \ \forall x \in \mathbb{R}$
(f) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

(21) Dada f una función que satisface que $f^{'}(x) \geq x^2 - \ln x$, probar que f es creciente en la semirrecta abierta $(0, +\infty)$.

(22) Desarrollar:
(a) El polinomio $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$ en potencias de $x - 2$
(b) La función $\sqrt{x}$ en potencias de $x - 1$ de orden 3.

(23) (a) Hallar el polinomio de Maclaurin de grado tres para las funciones:
(i) $y = \ln(x+1)^2$
(ii) $y = e^{x+2}$
(b) Hallar el polinomio de Taylor de grado tres de $f(x) = \tan x$ en $a = \pi/4$.

(24) (a) Hallar el polinomio de Maclaurin de orden 2 y la expresión del resto de la función $y = \sqrt{1+x}$
(b) Evaluar el error de la igualdad aproximada $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ cuando $x = 0,2$.

(25) (a) Hallar el polinomio de Maclaurin de grado n de la función $y = (1+x)^{\alpha}$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$.
(b) Calcular aproximadamente el valor de $(1,3)^{2/3}$ con error menor que 1/100.

(26) Calcular:
(a) el número e con error menor que $1/10^4$.
(b) $\cos(3°)$ con error menor que $1/10^2$.
(c) $\ln\frac{2}{3}$ con error menor que $1/10^3$.

(27) Aplicando la fórmula de Taylor, calcular los límites de las expresiones:
(a) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$
(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+x) - \sin^2(x)}{1 - e^{-x^2}}$

(28) Sea $f(x) = 2x^2 - x.\mathrm{sen}(x) - \cos^2(x)$.
(a) Comprobar que f tiene por lo menos 2 ceros.
(b) Encontrar un mínimo local.

(29) *Regla de L'Hopital.* Calcular los siguientes límites:
(a) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n - 1}$
(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}$
(c) $\lim_{x\to +\infty} x^n e^{-x}$
(d) $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{ln(x)}$
(e) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^n}$
(f) $\lim_{x\to 1} \frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}$
(g) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$
(h) $\lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{x})^{\sin x}$