Análisis 1

SEGUNDO CUATRIMESTRE 2005

PRÁCTICA 7

(1) Calcule las derivadas parciales de segundo orden para las siguientes funciones, verificando la igualdad de las derivadas parciales mixtas para aquellas funciones de clase C^2:
  (a) $f(x,y) = x^3y + e^{xy^2}$
  (b) $f(x,y,z) = ye^z + \frac{e^y}{x} + xy\sin(z)$
  (c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} + \ln(z)$
  (d) $f(x,y) = x^2e^{\frac{y}{x}} + y^2$
  (e) $f(x,y) = \arctan(x^3 - 2xy)$

(2) Calcule todas las derivadas de tercer orden para las siguientes funciones:
  (a) $f(x,y,z) = xyz$
  (b) $f(x,y,z) = e^{xyz}$
  (c) $f(x,y,z) = \cos(x^2+y) - \sin(y^2z)$
  (d) $f(x,y,z) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1}$

(3) Pruebe que si f es $C^3(\mathbb{R}^3)$ entonces:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$$

¿Cuáles otras son iguales?

(4) Supongamos que f es de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$ y que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \ \ \forall (x,y)$. Probar que

$$f(x,y) = g(x) + h(y)$$

(5) (a) Encuentre todas las funciones f tales que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \equiv 0$ en $\mathbb{R}^3$ $\forall i,j = 1,2,3$.
  (b) Encuentre todas las funciones f tales que

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} \equiv 0 \ \ \forall \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) : |\alpha| = k (k \in \mathbb{N}, \text{fijo})$$

(6) Sean $f(x,y) = \cos(xy), x(u,v) = u+v, y(u,v) = u-v$. Calcule $\frac{\partial^2}{\partial u^2} f\left(x(u,v), y(u,v)\right)$ y $\frac{\partial^3}{\partial u \partial y^2} f\left(x(u,v), y(u,v)\right)$
  (a) Sustituyendo
  (b) Usando la regla de la cadena.

(7) *Laplaciano - Función armónica*

Se dice que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2 satisface la ecuación de Laplace o bien que es una función armónica en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ si:

$$\triangle\, f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \nabla^2 f \equiv 0 \text{ en } U$$

Verifique que las siguientes funciones son armónicas en $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto. Determine U en cada caso:
  (a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2$
  (b) $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$
  (c) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
  (d) $f(x,y,z) = e^{3x+4}\cos(5z) + 4y$

(8) Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = g(||x||)$. Demuestre que:

$$\triangle f(x) = \frac{d^2 g}{dt}(||x||) + \frac{2}{||x||}\frac{dg}{dt}(||x||)$$

(9) Sean f, g dos funciones C^2 definidas en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y tales que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Pruebe que f y g son armónicas en U.

(10) Calcule la fórmula de Taylor de segundo orden para las funciones dadas en el punto indicado. Escriba la forma de Lagrange del residuo.

(a) $f(x,y) = (x+y)^2$ en $(0,0)$
(b) $f(x,y) = e^{x+y}$ en $(0,0)$
(c) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ en $(0,0)$
(d) $f(x,y) = e^{(x-1)^2}\cos(y)$ en $(1,0)$
(e) $f(x,y) = \sin(xy)$ en $(1,\pi)$
(f) $f(x,y) = e^x \sin(y)$ en $(2, \frac{\pi}{4})$
(g) $f(x,y) = \ln(1+xy)$ en $(2,3)$
(h) $f(x,y) = x + xy + 2y$ en $(1,1)$
(i) $f(x,y) = x^y$ en $(1,2)$
(j) $f(x,y,z) = x + \sqrt{y} + \sqrt[3]{z}$ en $(2,3,4)$

(11) Utilizando los resultados anteriores calcule $(0.95)^{2.01}$

(a) con error menor que $1/200$
(b) con error menor que $1/5000$

(12) Obtenga la fórmula aproximada

$$\frac{\cos x}{\cos y} = 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

para valores suficientemente pequeños de $|x|, |y|$.

(13) (a) Calcule el polinomio de Taylor de grado 1 centrado en $(1,1)$ de la función $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$

(b) Use la parte a) para evaluar $e^{\frac{4}{10}}$ usando que $\frac{4}{10} = (1+\frac{1}{10})^2 - (1-\frac{1}{10})^2$. Compruebe que el error que cometió es menor que 0.3

(14) Calcule el polinomio de segundo grado que mejor aproxima en el origen a la función $f(x,y) = \sin(x)\sin(y)$.

(15) Encuentre los puntos críticos de las siguientes funciones y analice cuáles son puntos de ensilladura:

(a) $f(x,y) = x^2 - y^2$
(b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x$
(c) $f(x,y) = xy$
(d) $f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2 y}} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$

En cada caso analice si puede haber extremos que no sean puntos críticos. Si los hay, encuéntrelos.

(16) (a) Calcule los extremos de $f(x,y) = x^2 + y^4$ y de $g(x,y) = x^4 + y^4$ y sus hessianos en dichos puntos.

(b) Sea f de clase C^2 tal que tiene un extremo estricto en $a \in \mathbb{R}^n$. ¿Es necesariamente $Hf(a)$ definida positiva o negativa?

(17) Sea $f(x,y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$. Pruebe que:

(a) $(0,0)$ es un punto de ensilladura.
(b) $D(Hf(0,0)) = 0$.

(c) f tiene un mínimo relativo en $(0,0)$ sobre cada recta que pase por $(0,0)$, es decir, si $g(t) = (at, bt)$ entonces $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un mínimo relativo en 0 para cada elección de a, b.

(18) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$
(a) Pruebe que $(0,0)$ es un punto crítico pero no extremo.
(b) Pruebe que $\pm\sqrt{2}(1,-1)$ son mínimos absolutos.
(c) ¿Hay máximos relativos?

(19) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2 no lineal tal que $Df(x_0) \neq 0$. Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(x) = f(x) - Df(x_0)(x)$$

(a) Demuestre que x_0 es un punto crítico de g.
(b) Pruebe que $Hf(x_0) = Hg(x_0)$.
(c) ¿Qué pasaría con $g(x) = f(x) - Df(x_0)(x - x_0)$?

(20) Para las siguientes funciones, encuentre los puntos críticos y analice cuáles son máximos, mínimos locales o puntos de ensilladura:
(a) $f(x,y) = (2x + 1 - y)^2$
(b) $f(x,y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y + 1$
(c) $f(x,y) = 10x^2 + 10y^2 + 12xy + 2x + 6y + 1$
(d) $f(x,y) = e^{1+x^2+y^2}$
(e) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + xy$
(f) $f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 2y + 1$
(g) $f(x) = \frac{1}{1+||x||^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$
(h) $f(x,y) = (x-y)^2 + 1 + 2(x-y)$
(i) $f(x,y) = e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2\right)$
(j) $f(x,y,z) = xy + z^2$
(k) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$
(l) $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$

(21) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que:

$$f(0,1) = 0, \nabla f(0,1) = (0,2) \text{ y } Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definida por $g(x,y) = 3x^2y + e^{f(x,y)} - 2y$
(a) Calcule $Hg(0,1)$
(b) ¿Tiene g un extremo relativo en $(0,1)$?

(22) Decida si existen o no, números reales a y b tales que la función

$$f(x,y) = e^{y^4-x^2} + a(x-y) + b(x-2)(y-1)$$

tenga un mínimo relativo en el punto $(2,1)$.

(23) Determine los extremos absolutos de $f|_A$ en los siguientes casos:
(a) $f(x,y) = xy(x-y)^2$ $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\right\}$
(b) $f(x,y) = xy(x-y)^2$ $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\right\}$
(c) $f(x,y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x$ $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 3, |y| \leq 3\right\}$
(d) $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$ $A = \mathbb{R}^2$
(e) $f(x,y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$ $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 1, |y| \leq 1\right\}$

(24) Se tiene en el plano un cuadrado cerrado (incluyendo el interior) A de vértices $\{(-1,0), (1,0), (1,-2), (-1,-2)\}$.

Encuentre los extremos absolutos de la función $f(x,y) = 2x - y^2$ en el recinto B, donde B es el recinto $\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 1\right\} \cap A$.

(25) Encuentre el punto de la parábola $y^2 = 4x$ cuya distancia al $(1,0)$ es mínima
(a) Usando multiplicadores de Lagrange
(b) Reduciéndolo a trabajar con una función de una variable.

(26) Encuentre los máximos y mínimos de $f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1$ dentro del círculo unitario y en el borde.

(27) Encuentre los máximos y mínimos de $f(x,y) = y + x - 2xy$ en el interior y en el borde de $R = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, |x| \leq \frac{1}{2}\right\}$.

(28) Encuentre los extremos de f sujetos a las restricciones mencionadas:

(a) $f(x,y,z) = x - y + z \qquad A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 2\right\}$

(b) $f(x,y) = \sin(xy) \qquad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 2y^2 = 1\right\}$

(c) $f(x,y) = xy \qquad A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{|xy|}{|xy|+1} \leq 1\right\}$

(d) $f(x,y,z) = x+y+z \qquad A = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - y^2 = 1, 2x + z = 1\right\}$

(29) Resuelva los siguientes problemas geométricos mediante el método de Lagrange:

(a) Encontrar la distancia más corta desde el punto $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ hasta el plano de ecuación $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ donde $(b_1, b_2, b_3) \neq (0,0,0)$.

(b) Encontrar el punto sobre la recta de intersección de los dos planos $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0$ y $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ que esté más cerca del origen.

(c) Mostrar que el volumen del mayor paralelepípedo rectangular que puede inscribirse en el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

es $8abc/3\sqrt{3}$.

(30) Encuentre la distancia mínima entre la parábola $y = x^2$ y la recta $x - y - 2 = 0$.

(31) Encuentre el punto de la superficie $z = xy - 1$ más cercano al origen.

(32) Siendo A, B, C tres ángulos positivos tales que $A + B + C = \pi/2$, demuestre que siempre se cumple

$$\sin(A)\sin(B)\sin(C) \leq \frac{1}{8}$$

(33) Un envase cilíndrico debe tener capacidad de un litro. ¿Cómo debe diseñarse el envase para minimizar el material empleado?

(34) Encuentre los puntos más lejanos y cercanos al punto $(0,0,2)$ de la esfera de ecuación

$$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$$