ANALISIS I PRIMER CUATRIMESTRE 2004

REVISION DE ALGUNOS TEMAS DE UNA VARIABLE REAL.

I. SUCESIONES.
Axioma del supremo.
Limite de sucesiones. Existe una sucesion que converge al supremo.
Toda sucecion monotona acotada tiene limite.
Binomio de Newton. Limite "e".

II. SERIES NUMERICAS.
Series convergentes y divergentes. Serie geometrica y serie armonica.
Series de terminos positivos. Criterios de comparacion.
Criterios de D'Alembert, Cauchy e Integral.
Series alternadas. Leibtniz.
Convergencia absoluta y convergencia condicional.
Reordenamiento de terminos.

III. FUNCIONES.
Representacion grafica. Composicion versus substitucion.
Curvas en forma parametrica.
Limite de funciones.
Limite *sen(x)/x.*
Funciones continuas. $f(Limite\ x_n) = Limite\ f(x_n)$.

IV TEOREMAS SOBRE FUNCIONES CONTINUAS.
Toda sucesion convergente es acotada.
Toda sucesion acotada tiene una subsucesion convergente.

$\mathrm{f}(\mathrm{x}_0) > 0$ entonces $\exists\ \epsilon > 0$ tal que $\mathrm{f}(\mathrm{x}) > 0\ \forall\ \mathrm{x} \in (\mathrm{x}_0 - \epsilon, \mathrm{x}_0 + \epsilon)$.
Funcion continua en un intervalo cerrado toma todos los valores intermedios.
Funcion continua en un intervalo cerrado es acotada.
Funcion continua en un intervalo cerrado alcanza sus extremos

IV. CALCULO DIFERENCIAL.
Derivada. Recta tangente al grafico de la funcion.
Regla de la cadena.
Funcion inversa y su derivada.
Derivada de una funcion en forma implicita. Recta tangente.
Derivada de una funcion en forma parametrica. Recta tangente.

Teoremas del valor medio de Rolle, Lagrange y Cauchy.
Aproximacion lineal con error relativo que tiende a cero.
Unicidad de una tal aproximacion. Diferencial.
Calculo de valores aproximados.
Aproximaciones de orden superior. Polinomio de Taylor.
Resto de Lagrange.

V. SERIES DE POTENCIAS.
Intervalalo de convergencia. Suma de la serie.
Converegencia uniforme de una sucesion de funciones en un intervalo [a, b].
Continuidad de la funcion limite.
Sumas parciales de una serie de potencias convergen uniformemente a la Suma.
Continuidad de la Suma.
Integral y Derivada termino a termino.
Serie de Taylor. (series de la exponencial, el seno y el coseno).
Formula general del binomio $(1 + x)^{\alpha}$, con α numero real arbritrario.
Calculo de series de funciones sin usar la formula de Taylor.
Solucion por series de potencias de algunas ecuaciones diferenciales.

VARIAS VARIABLES

VI. SUCESIONES DE PUNTOS EN $\mathbf{R^n}$
Distancia, esferas.
Puntos interiores. Interior. Abiertos.
Puntos adherentes. Clausura. Cerrados.
Conjuntos acotados.
Limite de sucesiones de puntos.
Limite en $\mathbf{R^n}$ si y solo si limite en cada coordenada.
Cerrado si y solo si cerrado para limites de sucesiones de puntos.

VII. FUNCIONES DE $\mathbf{R^n}$ EN $\mathbf{R^k}$.
Representacion grafica. Composicion versus substitucion.
Dominio de definicion. Curvas y superficies de nivel.
Limite de funciones.de $\mathbf{R^n}$ en $\mathbf{R^k}$.
Limite a lo largo de rectas (ejes coordenados) y de curvas.
Funciones continuas. *f(Limite p_n) = Limite f(p_n).*
F: $\mathbf{R^n}$ −−> $\mathbf{R^k}$, F = (f_1, f_2,... f_k) continua si y solo si f_i continua $\forall$ i.
Composicion de funciones continuas es continua.

VIII. TEOREMAS SOBRE FUNCIONES CONTINUAS DE $\mathbf{R}^{\mathbf{n}}$ EN **R.**
Toda sucesion convergente es acotada.
Toda sucesion acotada tiene una subsucesion convergente.

$f(p_0) > 0$ entonces $\exists\ \epsilon > 0$ tal que $f(p) > 0\ \forall\ p \in S_{p,\ \epsilon}$
Funcion continua en un cerrado acotado es acotada.
Funcion continua en un cerrado acotado alcanza sus extremos

IX. CALCULO DIFERENCIAL EN VARIAS VARIABLES ($\mathbf{R^n} --> \mathbf{R^k}$).

Derivadas parciales. Hiperplano tangente al grafico de la funcion.
Aproximacion lineal con error relativo que tiende a cero.
($|$ Error $|$ / $|$ Incremento $|$ $--->$ 0).
Unicidad de una tal aproximacion.
Diferencial (matriz Jacobiana Df) de una funcion $\mathbf{R^n} --> \mathbf{R^k}$.
Regla general de la cadena $\mathbf{R^n} --> \mathbf{R^k} --> \mathbf{R^s}$. Casos particulares
Teoremas generales de la funcion inversa y de la funcion implicita.

Producto escalar $<p, q>$ en $\mathbf{R}\ ^{\mathbf{n}}$, angulos, proyeccion ortogonal.
Ecuacion del hiperplano ortogonal a un vector.
Funciones lineales $\mathbf{R^n} --> \mathbf{R^k}$, matriz asociada.

Derivadas direccionales en direccion v, $|$ v $|$ = 1.
Gradiente ∇_f , ∂f / ∂v = $<v, \nabla_f >$ = Df $\cdot$ v.
∂f / ∂v = 0 si v tangente a la (hiper)superficie de nivel.
∂f / ∂v = maxima si v es la direccion del gradiente.
Ecuacion del hiperplano tangente.a las superficies de nivel:
$<\nabla_f$, v $>$ = 0, o equivalentemente, Df $\cdot$ v = 0.
Teorema del valor medio (Lagrange) en varias variables.

X. CALCULO DIFERENCIAL DE ORDEN SUPERIOR EN VARIAS VARIABLES ($\mathbf{R^n} --> \mathbf{R}$).

Derivadas parciales de orden superior.
Aproximacion polinomial de orden '2'. (Error / $|$ Incremento $|\ ^2$ $--->$ 0).
Matriz Hessiana (o Hessiano) Hf.
Aproximacion polinomial de orden 'k'. (Error / $|$ Incremento $|\ ^k$ $--->$ 0).
Desarrollo de Taylor. Resto de Lagrange.
Potencias simbolicas, operador (∂f / ∂x x + ∂f / ∂y y +... ∂f / ∂z z) ^{n}

XI. EXTREMOS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES LIBRES.

Detalles del desarrollo de Taylor de orden 2.
Extremos y puntos criticos, condicion para que p sea un punto critico:
∂f / ∂v = 0 para todo v, o sea ∇_f = Df = 0.
El Hessiano determina la naturaleza del punto critico.

Formas cuadraticas, matriz A asociada. ψ(p) = p^t A p. Diagonalizacion de matrices simetricas por operaciones simultaneas de filas y columnas.
p^t A p y p^t ΔA p toman los mismos valores. (donde ΔA= matriz A diagonalizada).

Aplicacion al analisis de los puntos criticos en n variables:
$\exists\ \lambda = 0$ no se puede decir nada. $\lambda \neq 0\ \forall\ \lambda$, se puede clasificar:
($\lambda > 0\ \forall\ \lambda$: minimo), ($\lambda < 0\ \forall\ \lambda$: maximo), ($\exists\ \lambda > 0$ y $\exists\ \lambda < 0$: ensilladura).
(donde λ son los numeros en la diagonal de ΔHf, matriz diagonalizada del Hessiano).

Deducir criterio explicito para el caso n = 2.

X. EXTREMOS DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES LIGADAS.
Extremos de f: $\mathbf{R^n}$ −−> $\mathbf{R}$ sobre (G = 0), G: $\mathbf{R^n}$ −−> $\mathbf{R^k}$.
Ecuacion del hiperplano tangente a (G = 0): DG · v = 0.
Condicion para que un punto p sea un punto critico (posible extremo):
∂f / ∂v = 0 $\forall v \in$ Tangente$_p$(G = 0), $\iff$ $\forall v$ (DG · v = 0 $\Rightarrow$ ∂f / ∂v = 0)
$\iff$ $\forall v$ (DG · v = 0 $\Rightarrow$ Df · v = 0) $\iff$
Df esta en el ortogonal del ortogonal a DG $\iff$ Df esta en DG, $\iff$
Df combinacion lineal de las filas de DG:

Multiplicadores de Lagrange. Forma explicita en casos particulares.

BIBLIOGRAFIA

N. PISKOUNOV. Calculo diferencial e integral, tomos I y II, editorial MIR.

M. R. SPIEGEL. Calculo superior (Advanced Calculus). Serie Shaum.

SPIVAK, M., Calculus (Calculo Infinitesimal) , Vol I y II, Editorial Reverte.

REY PASTOR J., Pi Calleja y Trejo. Analisis Matematico Vol I y II. Editorial Kapelusz.

APOSTOL, T., Calculus. Vol I y II, Editorial Reverte.

COURANT, R., Differential and Integral Calculus, Editorial Interscience.

MARDSEN J . y TROMBA A., Calculo vectorial. Tercera edicion, Addison-Wesley.

NORIEGA R. Calculo Diferencial e Integral, Editorial Docencia, BS AS.

1er Cuatrimestre 2004.