

Análisis I - Práctica 4

1. Hallar los valores de x para los cuales convergen las series:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right)$

(e) $\sum_{n=1}^{\infty} 3n^2 x^{n^2}$

(f) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+1)^n$

2. Escribir los primeros cuatro términos del desarrollo en serie de potencias de x de las funciones:

(a) $\tan(x)$

(b) $e^{\cos(x)}$

(c) $\ln(1+e^x)$

(d) $(1+x)^x$

3. Calcular la serie de Maclaurin de las siguientes funciones: e^x , e^{x^2} , e^{-x^2} , a^x y $\sin x$.

4. Aprovechando las fórmulas del desarrollo en serie de potencias de las funciones e^x , $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$ desarrollar en series de potencias las siguientes funciones y determinar los radios de convergencia:

(a) $\frac{1}{1-x}$

(b) $\sqrt{1+x}$

(c) $\frac{1}{10+x}$

(d) $\frac{1}{1+x^2}$

(e) $\cos^2(x)$

(f) $(1+x)e^{-x}$

(g) $\frac{1}{4-x^4}$

(h) $\frac{e^x-1}{x}$

(i) $\frac{1}{(1+x)^2}$

(j) $\arctan(x)$

(k) $\frac{x}{(1+x^2)^2}$

5. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ para $|x| < 1$. Rta: $\frac{x}{(1-x)^2}$.
6. (a) Calcular el desarrollo en serie de $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, indicando el radio de convergencia.
- (b) Comprobar que con el desarrollo anterior, se puede escribir $\ln(a)$ como una serie convergente de número racionales, cualquiera sea $a \in \mathbb{N}$. Escriba una fórmula para $\ln(5)$.
7. Calcular:
- (a) $\cos(10^\circ)$ con error menor que 10^{-4} .
- (b) $\sin(18^\circ)$ con error menor que 10^{-3} .
- (c) $\arctan(1/5)$ con error menor que 10^{-4} .
- (d) $\ln(5)$ con error menor que 10^{-3} .
- (e) \sqrt{e} con error menor que 10^{-4} .
- (f) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ con error menor que 10^{-4} .
8. Desarrollando en serie de potencias de x integrar las siguientes ecuaciones diferenciales y definir el dominio de aplicación de la solución obtenida.
- (a) $y' + xy = 0, \quad y(0) = 0$
- (b) $y'' + xy' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
- (c) $y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
- ¿De qué función es éste el desarrollo en serie de potencias de x ?
9. Encuentre los primeros cuatro términos distintos de cero del desarrollo en serie de potencias de x de las siguientes ecuaciones
- (a) $y'' = x + y^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
- (b) $y' = x^2y + y^3, \quad y(0) = 1$
- (c) $y'' = xy^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
10. Para todos los valores reales de $p > 0$, estudiar la convergencia o divergencia de las integrales:
- (a) $\int_1^{+\infty} x^p dx$
- (b) $\int_0^1 x^p dx$
- (c) $\int_0^{+\infty} x^p dx$
- Sugerencia: dividir los valores de p de la siguiente manera: $0 < p < 1, p = 1$ y $p > 1$.

11. Analizar la convergencia de las siguientes integrales:

(a) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(b) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^2(x)}$

(c) $\int_0^{+\infty} e^{-kx} dx$

(d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6} dx$

(e) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$

(f) $\int_{-1}^3 \frac{dx}{(1-x)^3}$

(g) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2x) dx$

(h) $\int_0^4 \frac{x}{x^2-4} dx$

(i) $\int_0^1 (\ln x)^2 dx$

(j) $\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x} dx$

(k) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$

12. Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) Si $f(x)$ es una función continua y positiva tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a > 0$, entonces $\int_0^{+\infty} f(x) dx = +\infty$.

(b) Si $f(x)$ es una función continua y positiva tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a > 0$, entonces $\int_0^{-\infty} f(x) dx = -\infty$.

(c) Si $f(x)$ es una función continua y decreciente con $\int_4^{+\infty} f(x) dx = 3$, entonces $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(d) Si $f(x)$ es una función continua y positiva con $\int_4^{+\infty} f(x) dx = 8$, entonces $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

(e) Si $f(x)$ es una función continua y positiva tal que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, entonces $\int_0^{+\infty} f(x) dx < +\infty$.