

## Análisis I - Práctica 7

1. Calcule las derivadas parciales de segundo orden para las siguientes funciones, verificando la igualdad de las derivadas parciales mixtas para aquellas funciones de clase  $C^2$ :

(a)  $f(x, y) = x^3y + e^{xy^2}$

(b)  $f(x, y, z) = ye^z + \frac{e^y}{x} + xy \sin(z)$

(c)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + \ln(z)$

(d)  $f(x, y) = x^2e^{\frac{y}{x}} + y^2$

(e)  $f(x, y) = \arctan(x^3 - 2xy)$

2. Calcule todas las derivadas de tercer orden para las siguientes funciones:

(a)  $f(x, y, z) = xyz$

(b)  $f(x, y, z) = e^{xyz}$

(c)  $f(x, y, z) = \cos(x^2 + y) - \sin(y^2z)$

(d)  $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$

3. Pruebe que si  $f$  es  $C^3(\mathbb{R}^3)$  entonces:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$$

¿Cuáles otras son iguales?

4. Supongamos que  $f$  es de clase  $C^2$  en  $\mathbb{R}^2$  y que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0 \quad \forall (x, y)$ . Probar que

$$f(x, y) = g(x) + h(y)$$

5. (a) Encuentre todas las funciones  $f$  tales que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \equiv 0$  en  $\mathbb{R}^3 \quad \forall i, j = 1, 2, 3$ .  
 (b) Encuentre todas las funciones  $f$  tales que

$$\frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x^\alpha} \equiv 0 \quad \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) : |\alpha| = k (k \in \mathbb{N}, \text{fijo})$$

6. Sean  $f(x, y) = \cos(xy)$ ,  $x(u, v) = u + v$ ,  $y(u, v) = u - v$ . Calcule  $\frac{\partial^2}{\partial u^2} f(x(u, v), y(u, v))$  y  $\frac{\partial^3}{\partial u \partial y^2} f(x(u, v), y(u, v))$

(a) Sustituyendo

(b) Usando la regla de la cadena.

7. *Laplaciano - Función armónica*

Se dice que una función  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$  satisface la ecuación de Laplace o bien que es una función armónica en un conjunto abierto  $U \subset \mathbb{R}^n$  si:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \nabla^2 f \equiv 0 \text{ en } U$$

Verifique que las siguientes funciones son armónicas en  $U \subset \mathbb{R}^3$  abierto. Determine  $U$  en cada caso:

- (a)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2z^2$
- (b)  $f(x, y, z) = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$
- (c)  $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$
- (d)  $f(x, y, z) = e^{3x+4} \cos(5z) + 4y$

8. Sean  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  y  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = g(\|x\|)$ . Demuestre que:

$$\Delta f(x) = \frac{d^2 g}{dt^2}(\|x\|) + \frac{2}{\|x\|} \frac{dg}{dt}(\|x\|)$$

9. Sean  $f, g$  dos funciones  $C^2$  definidas en un abierto  $U \subset \mathbb{R}^2$  y tales que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Pruebe que  $f$  y  $g$  son armónicas en  $U$ .

10. Calcule la fórmula de Taylor de segundo orden para las funciones dadas en el punto indicado. Escriba la forma de Lagrange del residuo.

- (a)  $f(x, y) = (x + y)^2$  en  $(0, 0)$
- (b)  $f(x, y) = e^{x+y}$  en  $(0, 0)$
- (c)  $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + 1}$  en  $(0, 0)$
- (d)  $f(x, y) = e^{(x-1)^2} \cos(y)$  en  $(1, 0)$
- (e)  $f(x, y) = \sin(xy)$  en  $(1, \pi)$
- (f)  $f(x, y) = e^x \sin(y)$  en  $(2, \frac{\pi}{4})$
- (g)  $f(x, y) = \ln(1 + xy)$  en  $(2, 3)$
- (h)  $f(x, y) = x + xy + 2y$  en  $(1, 1)$
- (i)  $f(x, y) = x^y$  en  $(1, 2)$
- (j)  $f(x, y, z) = x + \sqrt{y} + \sqrt[3]{z}$  en  $(2, 3, 4)$

11. Utilizando los resultados anteriores calcule  $(0.95)^{2.01}$

- (a) con error menor que  $1/500$
- (b) con error menor que  $1/5000$

12. Obtenga la fórmula aproximada

$$\frac{\cos x}{\cos y} = 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

para valores suficientemente pequeños de  $|x|, |y|$ .

13. (a) Calcule el polinomio de Taylor de grado 1 centrado en  $(1, 1)$  de la función  $f(x, y) = e^{x^2 - y^2}$

- (b) Use la parte a) para evaluar  $e^{\frac{4}{10}}$  usando que  $\frac{4}{10} = (1 + \frac{1}{10})^2 - (1 - \frac{1}{10})^2$ .  
Compruebe que el error que cometió es menor que  $0.003$

14. Calcule el polinomio de segundo grado que mejor aproxima en el origen a la función  $f(x, y) = \sin(x) \sin(y)$ .

15. Encuentre los puntos críticos de las siguientes funciones y verifique que son puntos de ensilladura:

- (a)  $f(x, y) = x^2 - y^2$
- (b)  $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x$
- (c)  $f(x, y) = xy$

$$(d) f(x, y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2 y}} & \text{si } xy \neq 0 \\ 0 & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

En cada caso analice si puede haber extremos que no sean puntos críticos. Si los hay, encuéntrelos.

16. (a) Calcule los extremos de  $f(x, y) = x^2 + y^4$  y de  $g(x, y) = x^4 + y^4$  y sus hessianos en dichos puntos.

- (b) Sea  $f$  de clase  $C^2$  tal que tiene un extremo estricto en  $a \in \mathbb{R}^n$ . ¿Es necesariamente  $Hf(a)$  definida positiva o negativa?

17. Sea  $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$ . Pruebe que:

- (a)  $(0, 0)$  es un punto de ensilladura.
- (b)  $D(Hf(0, 0)) = 0$ .
- (c)  $f$  tiene un mínimo relativo en  $(0, 0)$  sobre cada recta que pase por  $(0, 0)$ , es decir, si  $g(t) = (at, bt)$  entonces  $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tiene un mínimo relativo en  $0$  para cada elección de  $a, b$ .

18. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$
- Pruebe que  $(0, 0)$  es un punto crítico pero no extremo.
  - Pruebe que  $\pm\sqrt{2}(1, -1)$  son mínimos absolutos.
  - ¿Hay máximos relativos?
19. Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$  no lineal tal que  $Df(x_0) \neq 0$ . Sea  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dada por:

$$g(x) = f(x) - Df(x_0)(x)$$

- Demuestre que  $x_0$  es un punto crítico de  $g$ .
  - Pruebe que  $Hf(x_0) = Hg(x_0)$ .
  - ¿Qué pasaría con  $g(x) = f(x) - Df(x_0)(x - x_0)$ ?
20. Para las siguientes funciones, encuentre los puntos críticos y analice cuáles son máximos, mínimos locales o puntos de ensilladura:

- $f(x, y) = (2x + 1 - y)^2$
- $f(x, y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y + 1$
- $f(x, y) = 10x^2 + 10y^2 + 12xy + 2x + 6y + 1$
- $f(x, y) = e^{1+x^2+y^2}$
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + xy$
- $f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 2xy + 2xz + 2y + 1$
- $f(x) = \frac{1}{1+||x||^2}, x \in \mathbb{R}^n$
- $f(x, y) = (x - y)^2 + 1 + 2(x - y)$
- $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$
- $f(x, y, z, u, v) = 2xy + 2xz + 2xu + 2xv + 2yz + 2yu + 2yv + 2zu + 2zv + 2uv + 2x - 3y + 5z$
- $f(x, y, z, u, v, w) = x^2 + y^2 + 2z^2 + u^2 + 2v^2 + 2w^2 + 2xy + 6xz + 2xu + 4xv + 6xw + 2yu + 4yv + 2zu + 4zw + 4uv + x - y + 26w$
- $f(x, y, z, w) = x^2 + 2xy + 6xz + 2xw - 5y^2 - 10yz - 10yw - z^2 + 3w^2$

21. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$  tal que:

$$f(0, 1) = 0, \nabla f(0, 1) = (0, 2) \text{ y } Hf(0, 1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  está definida por  $g(x, y) = 3x^2y + e^{f(x,y)} - 2y$

- (a) Calcule  $Hg(0, 1)$
- (b) ¿Tiene  $g$  un extremo relativo en  $(0, 1)$ ?
22. Decida si existen o no, números reales  $a$  y  $b$  tales que la función
- $$f(x, y) = e^{y^4 - x^2} + a(x - y) + b(x - 2)(y - 1)$$
- tenga un mínimo relativo en el punto  $(2, 1)$ .
23. Encuentre curvas  $\sigma(t)$  que representen los siguientes conjuntos o trayectorias
- (a)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = e^x\}$
- (b)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 4x^2 + y^2 = 1\}$
- (c) Una línea recta en  $\mathbb{R}^2$  que pasa por el origen y el punto  $(a, b)$
- (d) El segmento que une el punto  $(1, 0)$  con  $(1, 2)$ .
- (e)  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 9x^2 + 16y^2 = 4\}$
24. Determine los extremos absolutos de  $f|_A$  en los siguientes casos:
- (a)  $f(x, y) = xy(x - y)^2$        $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\}$
- (b)  $f(x, y) = xy(x - y)^2$        $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\}$
- (c)  $f(x, y) = 2x^2 - xy + y^2 + 7x$        $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 3, |y| \leq 3\}$
- (d)  $f(x, y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$        $A = \mathbb{R}^2$
- (e)  $f(x, y) = 2x + 4y - x^2 - y^2 - 3$        $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$
25. Se tiene en el plano un cuadrado cerrado (incluyendo el interior)  $A$  de vértices  $\{(-1, 0), (1, 0), (1, -2), (-1, -2)\}$ .
- Encuentre los extremos absolutos de la función  $f(x, y) = 2x - y^2$  en el recinto  $B$ , donde  $B$  es el recinto  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \geq 1\} \cap A$ .
26. Encuentre el punto de la parábola  $y^2 = 4x$  cuya distancia al  $(1, 0)$  es mínima
- (a) Usando multiplicadores de Lagrange
- (b) Reduciéndolo a trabajar con una función de una variable.
27. Encuentre los máximos y mínimos de  $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + 1$  dentro del círculo unitario y en el borde.
28. Encuentre los máximos y mínimos de  $f(x, y) = y + x - 2xy$  en el interior y en el borde de  $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / |x| \leq \frac{1}{2}\}$ .
29. Encuentre los extremos de  $f$  sujetos a las restricciones mencionadas:

(a)  $f(x, y, z) = x - y + z \quad A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 = 2\}$

(b)  $f(x, y) = \sin(xy) \quad A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + 2y^2 = 1\}$

(c)  $f(x, y) = xy \quad A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / \frac{|xy|}{|xy|+1} \leq 1 \right\}$

(d)  $f(x, y, z) = x + y + z \quad A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - y^2 = 1, 2x + z = 1\}$

30. Resuelva los siguientes problemas geométricos mediante el método de Lagrange:

(a) Encontrar la distancia más corta desde el punto  $(a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$  hasta el plano de ecuación  $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$  donde  $(b_1, b_2, b_3) \neq (0, 0, 0)$ .

(b) Encontrar el punto sobre la recta de intersección de los dos planos  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0$  y  $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$  que esté más cerca del origen.

(c) Mostrar que el volumen del mayor paralelepípedo rectangular que puede inscribirse en el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

es  $8abc/3\sqrt{3}$ .

31. Encuentre la distancia mínima entre la parábola  $y = x^2$  y la recta  $x - y - 2 = 0$ .

32. Encuentre el punto de la superficie  $z = xy - 1$  más cercano al origen.

33. Siendo  $A, B, C$  tres ángulos positivos tales que  $A + B + C = \pi/2$ , demuestre que siempre se cumple

$$\sin(A) \sin(B) \sin(C) \leq \frac{1}{8}$$

34. Un envase cilíndrico debe tener capacidad de un litro. ¿Cómo debe diseñarse el envase para minimizar el material empleado?

35. Encuentre los puntos más lejanos y cercanos al punto  $(0, 0, 2)$  de la esfera de ecuación

$$x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1$$