
ANÁLISIS 1

Primer Cuatrimestre — 2006

Práctica 1

1. Resolver las siguientes inecuaciones:

a) $ x + 3 < 1$;	d) $ 3x - 1 < x - 1 $;
b) $ x - 3 \geq 10$;	e) $\left \frac{x - 2}{3x + 1} \right \leq 1$.
c) $ x > x + 3 $;	

2. Representar los siguientes conjuntos en $\mathbb{R}$:

a) $\{x : x - 1 < 1, x \notin \mathbb{Z}\}$;	c) $\{x : 0 < x^2 \leq x^3\}$.
b) $\{x : x - 3 < 2 - x \}$;	

3. a) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados superiormente:

- 1) $\mathbb{R}_{>0}$;
- 2) $\{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} \text{ con } n = m^2\}$.

b) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados inferiormente

- 1) $\mathbb{Z}$;
- 2) $\{x^{-1} : x < 0\}$;
- 3) $\text{Im}(f)$ donde $f(x) = -x^2 + 2x + 1$.

4. Determinar si los siguientes conjuntos poseen supremo, ínfimo, máximo y mínimo, y, en caso de poseerlos, calcularlos:

a) $\{n \in \mathbb{N} : 20 < n \leq 35\}$;	c) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$;
b) $\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$;	d) $\{\frac{2n}{7n-3} : n \in \mathbb{N}\}$.

5. Estudiar los extremos de los siguientes conjuntos y representarlos en la recta real:

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x + 3| + |x - 9| > 2\}$;
- b) $B = \{x \in \mathbb{R} : ||x + 2| - |x - 1|| < 1\}$;
- c) $C = \{x \in \mathbb{R} : |x^3 - 1| + |2 - x^3| = 1\}$.

6. a) Probar que el conjunto $A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$ no tiene máximo ni supremo en $\mathbb{Q}$.

b) Probar que el conjunto $B = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 > 2\}$ no tiene mínimo ni ínfimo en $\mathbb{Q}$.

Sugerencia: en (a) mostrar explícitamente que, dado $a \in A$, existe un elemento mayor que a en A y en (b) proceder análogamente.

7. Calcular

a) $\sup \left\{ \frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N} \right\};$

c) $\inf \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n : n \in \mathbb{N} \right\};$

b) $\sup \left\{ \frac{\sqrt{n+1}}{10+n} : n \in \mathbb{N} \right\};$

d) $\inf \{n^2 - 9n - 10 : n \in \mathbb{N}\}.$

8. Sea $a \geq 0$. Determinar para qué valores de b se verifican cada una de las siguientes condiciones:

a) $|a + b| = |a| + |b|;$

d) $|a - b| < |a| + |b|;$

b) $|a + b| < |a| + |b|;$

e) $||a| - |b|| = |a - b|;$

c) $|a - b| = |a| + |b|;$

f) $||a| - |b|| < |a - b|.$

9. Sean $0 \leq x \leq y$. Probar que $x \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq y$.

10. Mostrar que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ y determinar para cada $\varepsilon > 0$ un valor $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que $\left| \frac{n+1}{n} - 1 \right| < \varepsilon$ si $n > n_0$. Completar la siguiente tabla:

ε	0,1	0,001	0,00001	10^{-6}
n_0				

11. Mostrar usando la directamente la definición que:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin(n^2 + 3n - 2) - 3}{n} = 0;$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 1}{n^2 - n + 4} = 1;$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n}{2n + 5} = \frac{3}{2};$

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - \sin n}{n^2 + \cos n} = 1.$

12. Sean $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ y $g(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0$ polinomios de grado n y m respectivamente. Suponiendo que $a_n, b_m > 0$, investigar el límite

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{f(k)}{g(k)}$$

cuando $n > m$, $n = m$ ó $n < m$.

13. Calcular:

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^k \sin n!}{n+1}, \text{ si } 0 \leq k < 1;$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right);$

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n^3} + \frac{4}{n^3} + \dots + \frac{(n-1)^2}{n^3} \right).$

Sugerencia: Usar que $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$ y $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

14. Estudiar la convergencia de la sucesión $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cuando $n \rightarrow +\infty$ si:

$$\begin{aligned} a) \quad x_n &= (1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{4}) \cdots (1 - \frac{1}{2^n}); \\ b) \quad x_n &= \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{7} \cdots \frac{n+1}{2n-1}. \end{aligned}$$

15. La sucesión de *Fibonacci* es la sucesión $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ unívocamente determinada por las condiciones

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 = 1; \\ F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n, \quad \text{si } n \geq 0. \end{aligned}$$

Mostrar que $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n = +\infty$.

16. Definamos una sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ poniendo $a_1 = \alpha \neq 0$, y

$$a_{n+1} = \frac{2}{a_n}$$

cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$. ¿Para qué valores de α es a_n convergente?

17. Mostrar que si la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, también lo hace $(|a_n|)_{n \in \mathbb{N}}$. ¿Qué relación hay entre los límites de ambas sucesiones? ¿Vale la implicación recíproca?

18. Sin usar ningún criterio de convergencia, calcule, cuando $r \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} a) \quad &\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{r}; \\ b) \quad &\lim_{n \rightarrow \infty} r^n. \end{aligned}$$

19. a) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión con $a_n \in \mathbb{R}^+$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$, y supongamos que existe $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Probar que:

- 1) si $l < 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;
- 2) si $l > 1$, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$;
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

- b) Calcular, usando la parte anterior, el límite de las sucesiones con términos dados por:

- 1) $a_n = \sqrt[n]{n}$;
- 2) $a_n = \sqrt[n]{n!}$;
- 3) $a_n = \sqrt[n]{3^n + 2^n}$.

- c) Sea $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión con $a_n \in \mathbb{R}^+$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$. Mostrar mediante un ejemplo que puede existir $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$ y no existir $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Sugerencia: considerar $a_n = 2 + (-1)^n$.

20. Probar que, si $|x| < 1$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, la sucesión $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con término general dado por

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n+1)}{n!} x^n$$

tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$.

21. Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

$$\begin{array}{ll}
 a) \frac{(n+3)! - n!}{(n+4)!}; & f) \frac{\cos(n\pi/2)}{n^2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})}; \\
 b) \frac{n^4 - n + 2^n n}{(n^3 - 1)2^n}; & g) \frac{2 + (-1)^{n+1}}{2 + (-1)^n}; \\
 c) \frac{8^n - 4^n}{3^n}; & h) \frac{n}{e^n}; \\
 d) \frac{\sqrt[n]{1 + 2^n + \dots + n^n}}{n}; & i) \frac{\ln(n)}{n}; \\
 e) \sqrt[n]{n^2 + n}; & j) \left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^n.
 \end{array}$$

22. Calcular los límites de las siguientes sucesiones:

$$\begin{array}{ll}
 a) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n; & d) \left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{\frac{n^2+4}{n+1}}; \\
 b) n^{\frac{\sin(n)}{n}}; & e) \left(\frac{\sqrt{n}-2}{\sqrt{n}-5}\right)^{\sin(n)}. \\
 c) (n^4 + n)^{1/n^5}; &
 \end{array}$$

23. Escribir los primeros tres términos de las series dadas por los siguientes términos generales:

$$\begin{array}{ll}
 a) u_n = \frac{1}{n(n+1)}; & c) u_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}; \\
 b) u_n = \frac{n^3}{n+1}; & d) u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}.
 \end{array}$$

24. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

$$\begin{array}{ll}
 a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 3n - 1}{2n^2 + 3}; & f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}; \\
 b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}; & g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3+n^2}; \\
 c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10n}}; & h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n + 3}; \\
 d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n}; & i) \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right). \\
 e) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}; &
 \end{array}$$

25. Demostrar que si $n \in \mathbb{N}$, es

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}.$$

26. Si para cada $n \in \mathbb{N}$ es

$$r_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n),$$

mostrar que la sucesión $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

27. Hallar la suma de las siguientes series:

$$\begin{array}{ll} a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}}; & d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{6^n}; \\ b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}; & e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6^{n-2}}. \\ c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}; \end{array}$$

28. Se deja caer una pelota desde una altura de 5 metros. Cada vez que rebota en el piso, alcanza una altura de $3/4$ partes de la distancia desde la que cayó. Calcule la distancia total que habrá recorrido cuando quede en reposo.

29. Hallar la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 - 4n + 2}{n!}.$$

Sugerencia: descomponer el término general en la forma

$$\frac{3n^2 - 4n + 2}{n!} = \frac{A}{n!} + \frac{B}{(n-1)!} + \frac{C}{(n-2)!}.$$

30. Cuántos primeros términos hay que tomar en las series siguientes para que su suma difiera no más que en $1/10^6$ de la suma de las series correspondientes:

$$\begin{array}{ll} a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}; & c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}. \\ b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}; \end{array}$$

31. a) ¿Es cierto que si $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ son dos series divergentes, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_k b_k$ es divergente?

b) Si $a_n > 0$ cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$ y $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es creciente, entonces:

$$\begin{array}{l} 1) \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge.} \\ 2) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ no converge.} \end{array}$$

32. Decir si las siguientes series convergen condicional o absolutamente:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n}; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2 - 2n - 1}{n!}.$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n};$$

33. a) Probar que la serie armónica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

converge condicionalmente.

- b) Sea $s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$. Reordenemos los términos de la serie de modo que después de un término positivo vayan dos términos negativos:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \dots$$

Determinar la expresión del término general de esta serie y demostrar que la serie obtenida converge a $s' = \frac{1}{2}s$.



Augustin Louis Cauchy
1789–1857, Francia