Análisis I

Primer cuatrimestre — 2006

Lista de temas para el examen teórico final

El examen final constará de algunos temas
de esta lista más algunos problemas.

I. Funciones de una variable

1. Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ es acotada.
2. Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$ alcanza su máximo y su mínimo.
3. (a) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es tal que $f(a) < 0 < f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.
   (b) Corolario: Teorema de valores intermedios.
4. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es derivable en $x_0 \in (a, b)$ y x_0 es un máximo o un mínimo, entonces $f'(x_0) = 0$.
5. Teorema de Rolle: Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.
6. Teorema de Lagrange: Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y derivable en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$
7. Teorema de Cauchy: Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son continuas y deri- vables en (a, b), existe $c \in (a, b)$ tal que
$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c).$$
8. Fórmula de Taylor y expresión de Lagrange para el resto.

II. Series

1. Criterio de Cauchy o de la raíz.
2. Criterio de D'Alembert o del cociente.
3. Criterio de Leibniz para series alternadas.
4. Existencia del radio de convergencia de una serie de potencias.

III. Funciones de varias variables

1. Si una función es diferenciable en (x_0, y_0), entonces es continua en (x_0, y_0).
2. Sea B una bola abierta alrededor del punto (x_0, y_0) tal que para todo $(x, y) \in B$ existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ y son continuas en (x_0, y_0). Entonces f es diferenciable en (x_0, y_0).
3. Teorema del valor medio para funciones diferenciables en varias variables.
4. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable en un punto $P \in \mathbb{R}^n$ y sea $v \in R^n$ con $\|v\| = 1$. Entonces $\frac{\partial f}{\partial v}(P)$ existe y es igual a $\nabla f \cdot v$.
5. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que todas las derivadas de segundo orden existen y son continuas en una bola B alrededor de un punto P. Entonces $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P)$.
6. Fórmula de Taylor de segundo orden y expresión del resto en términos de las derivadas de tercer orden para una función C^3 de dos variables.
7. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en P y P es un extremo local de f, entonces $\nabla f(P) = 0$.
8. Criterio de la matriz Hessiana para la determinación de extermos de funciones de dos variables.