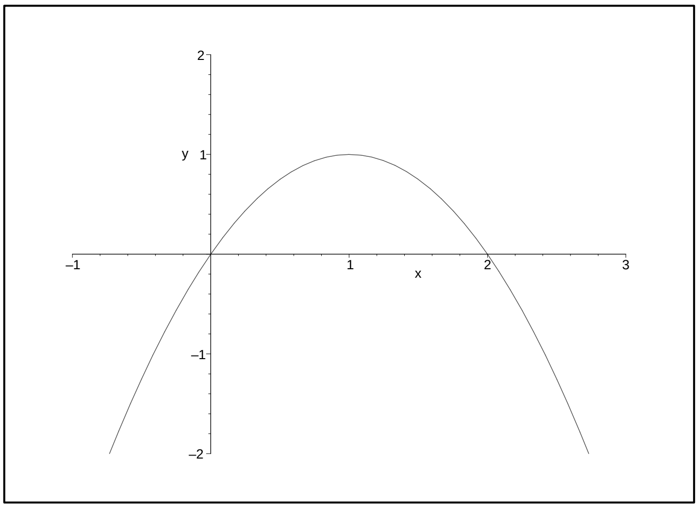
Análisis I - Práctica 2

1. Dado el gráfico de $f(x)$:



   trazar el gráfico de : $f(x-3)$, $f(2x)$, $f(x)-3$, $2f(x)$, $-f(x)$, $f(-x)$, $|f(x)|$.

2. Graficar:
   (a) $\sin(x)$, $3\sin(x)$, $\sin(3x)$.
   (b) $\sin(x+\pi)$, $\sin(x+2\pi)$.

3. Graficar $e^x, e^{-x}, -e^x$ y $-e^{-x}$.

4. Construir las gráficas de las siguientes funciones:
   (a) $f(x) = \begin{cases} 1+x & -1 \leq x \leq 0 \\ 1-2x & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$ en el segmento $[-1, 1]$
   (b) $f(x) = \begin{cases} x^3 & 0 \leq x \leq 1 \\ x & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ en el segmento $[0, 2]$

5. Usando la propiedad del gráfico de funciones inversas, graficar $\ln(x)$.

6. (a) Dada $\phi(x) = \frac{x-1}{3x+5}$, escribir las expresiones $\phi\left(\frac{1}{x}\right)$ y $\frac{1}{\phi(x)}$.
   (b) Dada $\Psi(x) = \sqrt{x^2+4}$, escribir las expresiones $\Psi(2x)$ y $\Psi(0)$.
   (c) Dadas $f(x) = \ln(x)$ y $g(x) = x^3$, hallar $f(g(2))$, $f(g(x))$, $g(f(x))$.

7. Hallar el dominio natural de las siguientes funciones:
   (a) $f_1(x) = \frac{1}{1+x^2}$

(b) $f_2(x) = \sqrt{2 + 3x - x^2}$

(c) $f_3(x) = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{2x}$

(d) $f_4(x) = \frac{\ln(1+4x)}{x}$

(e) $f_5(x) = \frac{\sin(\sqrt[3]{x-6} - \sqrt{x})}{x^3+8}$

8. Demostrar usando sólo la definición que:

   (a) $\lim_{x\to 1}(x-1)\sin(\frac{1}{x-1}) = 0$

   (b) $\lim_{x\to a}\sqrt{x} = \sqrt{a}$ $(a \geq 0)$

   (c) $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = 1$

   (d) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{2}{3}$

   (e) $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin(\sqrt{x})}{x} = +\infty$

   (f) $\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-2}{2x^2-3} = \frac{1}{2}$

   (g) $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-4}{x+6} = +\infty$

9. Para cada una de las siguientes funciones:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\sin^2(x) \qquad f_2(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \qquad f_3(x) = \begin{cases} \cos(\pi x/2) & |x| \leq 1 \\ |x-1| & |x| > 1 \end{cases}$$

$$f_4(x) = [x]\sin(\pi x) \quad f_5(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x > 0 \\ x^2 + 1 & x \leq 0 \end{cases} \qquad f_6(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & x < 0 \\ -x^2 + \frac{5}{2}x & x > 1 \end{cases}$$

$$f_7(x) = x^2 - [x^2] \quad f_8(x) = x\arctan(\tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{x-1}) \quad f_9(x) = \begin{cases} \frac{\sin(e^2 x)}{x} & x < 0 \\ (1+2x)^{1/x} & 0 < x < 1 \\ \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} & x > 1 \end{cases}$$

   (a) Calcular su dominio natural.

   (b) Estudiar la continuidad en cada punto de su dominio. En los puntos de discontinuidad, indicar de qué tipo se trata.

   (c) En los puntos que no pertenezcan al dominio, definirla (si es posible) de modo que resulte continua.

10. Calcular

    (a) $\lim_{x\to 3^+}\frac{[x^2]-[x]^2}{x^2-9}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\sin(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{1/x}}{ln(x)}$

(d) $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^3+3)-\ln(x^2+2)$

(e) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x+\cos x}{e^x+\ln x}$

11. (a) Sean $n \leq x < n+1$. Probar la siguiente desigualdad:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$$

(b) Usando el item a), probar que $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

12. Cacular los límites:

(a) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x$

(b) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$

(c) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$

(d) $\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}$

(e) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\alpha x)}{x}$

(f) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/\tan x}$

(g) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{1/x}$

13. Sea $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ y $g(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$ polinomios de grado n y m respectivamente. Suponer que $a_n, b_m > 0$ e investigar el límite

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

para los casos $n > m, n = m, n < m$. Analizar qué pasa cuando se tiene $\lim_{x\to-\infty}$.

14. Calcular:

(a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^3+2x-1}{2x^3+5}$

(b) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2}{5x^3-3x^2+x-9}$

(c) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^5+x^3-4}{-8x^4+6x}$

(d) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^m}{x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}$

15. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continua. Mostrar que $|f|$ es continua. ¿Vale la recíproca?

16. (a) Demostrar que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $\forall x > M$

$$10^{-(10^{10})}x^2 - 10^{10^{10}} > 10^{10^{10}}x + 10^{10^{10}}$$

    (b) Encontrar el mínimo M tal que vale a).

17. Sea f una función continua tal que $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{Q}$.

    (a) Calcular $f(\sqrt{2})$.

    (b) Calcular $\mathrm{Im}(f)$.

18. (a) Hallar todas las $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas tales que $(f(x))^2 - e^x = 0$.

    (b) Demostrar que la ecuación $x2^x = 1$ tiene al menos una raíz positiva y menor o igual que 1.

    (c) Demostrar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y verifica

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

    entonces debe ser suryectiva.

    (d) Sea $f(x) = 3x^7 - 4x^6 - 5x^5 + 3x^4 - \sin x$. Calcular $Im(f)$.

    (e) Probar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $f(x) \in \mathbb{Q}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces debe ser constante.

    (f) Probar que todo polinomio de grado impar tiene al menos una raíz real.

19. Sea $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = xsen(x)$.

    (a) Probar que existen sucesiones $\{x_n\}, \{y_n\}$ de números positivos tales que

$$\lim_n f(x_n) = +\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_n f(x_n) = -\infty.$$

    (b) Probar que $\mathrm{Im}\, f = \mathbb{R}$.

20. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x+1}{|x|+2} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right)$. Probar que:

    (a) f es discontinua en $x = 0$.

    (b) f es continua en $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

    (c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -1$, $|f(x)| < 1$.

    (d) $\mathrm{Im}\, f = (-1, 1)$.

21. Sea f continua y estrictamente creciente en la semirrecta $[a, +\infty)$ y tal que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = M$. Probar que $\mathrm{Im}\,(f) = [f(a), M)$.

    Mostrar con un ejemplo que si sólo se pide que f sea creciente, entonces puede ser $\mathrm{Im}\,(f) \neq [f(a), M)$.

22. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ estrictamente creciente y continua tal que

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = c \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = d$$

Probar:

(a) $\mathrm{Im}\,(f) = (c, d)$.
(b) Existe $f^{-1} : (c, d) \to (a, b)$ y es continua.
(c) $\lim_{x\to c^+} f^{-1}(x) = a$ y $\lim_{x\to d^-} f^{-1}(x) = b$.
(d) Encontrar contraejemplos si
   i. f no es creciente.
   ii. f no es continua.

23. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ continua y sean $T = \sup_{x\in(a,b)} f(x)$ y $B = \inf_{x\in(a,b)} f(x)$. Demostrar que $(B, T) \subseteq \mathrm{Im}\, f$.

24. Sea D un subconjunto denso en (a, b) y sean f y g funciones continuas en (a, b) tales que $f \equiv g$ en D. Probar que $f \equiv g$ en (a, b).

25. (a) Probar que existe $x \in (1, 2)$ tal que $x^3 - 3x + 1 = 0$.
(b) Probar que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos x = x$.
(c) Encontrar un número r tal que el polinomio $x^9 - 100x^4 + 3x^3 + 12$ tenga al menos una raíz en el intervalo $(-r, r)$.

26. Si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ son funciones continuas, distintas de cero en todo punto, tales que $|f(x)| = |g(x)|$ para todo $x \in [a, b]$ y existe un punto $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$, probar que $f \equiv g$ en $[a, b]$.

27. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\mathrm{Im}\,(f) = [a, b] \cup [c, d]$ con $a < b < c < d$. ¿Es f continua?

28. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(ax) = af(x)$ para todo $x, a \in \mathbb{R}$. Mostrar que f es continua. Más aún, caracterizar a todas las funciones con esa propiedad.

29. Sea $f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{1+x^n}$

(a) Calcular el dominio de definición de f.
(b) ¿Para qué valores de x resulta f continua?