Análisis I - Práctica 3

1. (a) Dada $f(x) = 2 - 2x + x^3$, hallar $f'(0), f'(2)$ usando la definición.
   (b) Dada $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, hallar $f'(0), f'(1)$ usando la definición.

2. Mostrar que $g(x) = x\,|x|$ es derivable para todo x, y calcular su derivada.

3. Hallar las derivadas de las funciones:
   (a) $f(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ \ln(1+x) & x \geq 0 \end{cases}$
   (b) $f(x) = \begin{cases} \sin(x^2 - 1) & x < -1 \\ \sqrt{x+1} & x \geq -1 \end{cases}$

4. (a) Si $f(x) = |x|^3$, calcular $f'(x)$, $f''(x)$ y demostrar que $f'''(0)$ no existe.
   (b) Definir una función que sea tres veces derivable pero que no exista la derivada cuarta en 0.

5. Determinar la pendiente de la recta tangente y hallar la ecuación de la recta tangente de las siguientes funciones en los puntos indicados:
   (a) $f(x) = x^3$ en $x = 1$ y $x = -1$. Construir la gráfica.
   (b) $f(x) = \frac{1}{x}$ en $x = 1/2$ y $x = 1$. Construir la gráfica.

6. (a) Hallar las coordenadas de los puntos $P = (x_0, y_0)$ de la curva $y = x^3 - 3x$ cuya recta tangente tenga pendiente igual a 9.
   (b) Hallar las coordenadas de los puntos $P = (x_0, y_0)$ de la misma curva cuya recta tangente pase por el origen.
   (c) Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes que puedan trazarse desde el origen a la curva $y = -4x^2 + 3x - 1$.
   (d) Hallar las ecuaciones de la recta tangente y de la normal a la curva $y = 2+x-x^3$ en el punto $(2, -4)$.

7. Sea
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{1/x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$
   (a) ¿Es f continua en todo $\mathbb{R}$?
   (b) Calcular $f'(x)$ para $x \neq 0$.
   (c) Analizar la existencia de las derivadas laterales y de la derivada en $x = 0$.

8. Sea f una función par y derivable en todo $\mathbb{R}$. Probar que

(a) $f'(0) = 0$.

(b) f' es una función impar.

¿Qué se puede concluir si f es impar?

9. Si f es derivable en un entorno de un punto x_0 se la puede descomponer en la forma $f(x) = l(x) + r(x)$ donde $l(x)$ es una función lineal y $r(x)$ satisface que $\lim_{x \to x_0} \frac{r(x)}{x-x_0} = 0$.

   Hallar esta descomposición para cada una de las siguientes f en el punto indicado:

   (a) $f(x) = x^3 - 2x - 1$ en $x_0 = 2$.

   (b) $f(x) = -2$ en $x_0 = 10$.

   (c) $f(x) = 1/x$ en $x_0 = 1$.

   (d) $f(x) = ax + b$ en $x_0 \in \mathbb{R}$.

10. Calcular los incrementos y diferenciales de las funciones:

    (a) $y = 2x^2 - x$ cuando $x = 1, \Delta x = 0,01$.

    (b) $y = \sin(x)$ cuando $x = \pi/3, \Delta x = \pi/18$.

11. (a) Sabiendo que $\sin(60°) = \sqrt{3/2} \simeq 0,866025$ y $\cos(60°) = 1/2$, hallar los valores aproximados de $\sin(60°3')$ y $\sin(60°18')$. (No usar calculadora).

    (b) Hallar un valor aproximado de $\tan(45°4'30")$.

    (c) Sabiendo que $\log_{10}(200) \simeq 2,30103$, hallar un valor aproximado de $\log_{10}(200,2)$.

    (d) Usando la aproximación diferencial, encontrar un valor aproximado de $\sqrt[3]{65}$.

    (e) Usando aproximación lineal de la función $f(x) = \sqrt{1-x}$, estimar los números $\sqrt{0,9}$ y $\sqrt{0,99}$.

    (f) Sea α un número real cualquiera. Encontrar la aproximación lineal de $(1+x)^\alpha$, y usar este resultado para estimar $(1,0002)^{50}$, $\sqrt[3]{1,009}$ y $\frac{1}{(1,0003)^{15}}$.

12. Empleando el concepto de diferencial, interpretar el origen de las siguientes fórmulas aproximadas:

    (a) $\sqrt{a^2+b} \simeq |a| + \frac{b}{2|a|}$

    (b) $\sqrt[3]{a^3+b} \simeq a + \frac{b}{3a^2}$

    donde $|b|$ es un número pequeño respecto de $|a|$.

13. Verificar que se cumple el teorema de Rolle para las siguientes funciones en los intervalos indicados:

    (a) $y = x^2 - 3x + 2$ en el segmento $[1, 2]$.

(b) $y = (x-1)(x-2)(x-3)$ en el segmento $[1, 3]$.

(c) $y = \sin^2(x)$ en el segmento $[0, \pi]$.

14. Comprobar que entre las raíces de la función $y = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 6}$ se encuentre la raíz de su derivada.

15. La función $y = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ se anula en los extremos del segmento $[-1, 1]$. Demostrar que la derivada de esta función no se hace cero en ningún punto de dicho segmento. Explicar por qué no vale el teorema de Rolle.

16. (a) Sea $f(x) = x(x-1)(x-2)(x+5)$. Probar que $f'(x)$ tiene exactamente tres raíces reales.

    (b) Probar que la ecuación $3x^5 + 15x - 8 = 0$ tiene sólo una raíz real.

    (c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida para un $a \in \mathbb{R}$ fijo por $f(x) = e^{a^2 x} + x^3 + x$. Probar que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente una solución en el intervalo $[-1, 0]$.

17. Comprobar que el Teorema de Lagrange es válido para la función $y = 2x - x^2$ en el segmento $[0, 1]$.

18. Aplicar el Teorema de Cauchy a las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x^3$ en el segmento $[1, 2]$ y hallar c.

19. Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b)

    (a) Probar que si $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces $f(x)$ es constante.

    (b) Probar que si $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, entonces $f(x) = g(x) + c$ donde c es una constante.

    (c) Probar que si $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces $f(x)$ es estrictamente creciente.

    (d) Análogamente si $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a, b)$, entonces $f(x)$ es estrictamente decreciente.

20. Probar las siguientes desigualdades:

    (a) $e^x \geq 1 + x \ \forall x \in \mathbb{R}$

    (b) $\sin x \leq x \ \forall x \geq 0$

    (c) $\sqrt{x} \geq \ln x \ \forall x > 0$

    (d) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) \leq x \ \forall x > 0$

    (e) $1 - \cos x \leq \frac{x^2}{2} \ \forall x \in \mathbb{R}$

    (f) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y| \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

21. Dada f una función que satisface que $f'(x) \geq x^2 - \ln x$, probar que f es creciente en la semirrecta abierta $(\frac{1}{2}, +\infty)$.

22. Desarrollar:

    (a) El polinomio $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + x + 2$ en potencias de $x - 2$

    (b) La función $\sqrt{x}$ en potencias de $x - 1$ de orden 3.

23. (a) Hallar el polinomio de Maclaurin de grado tres para las funciones:

    i. $y = \ln(x+1)^2$

    ii. $y = e^{x+2}$

    (b) Hallar el polinomio de Taylor de grado tres de $f(x) = \tan x$ en $a = \pi/4$.

24. (a) Hallar el polinomio de Maclaurin de orden 2 y la expresión del resto de la función $y = \sqrt{1+x}$

    (b) Evaluar el error de la igualdad aproximada $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$ cuando $x = 0,2$.

25. (a) Hallar el polinomio de Maclaurin de grado n de la función $y = (1+x)^\alpha$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$.

    (b) Calcular aproximadamente el valor de $(1,3)^{2/3}$ con error menor que $1/100$.

26. Calcular:

    (a) el número e con error menor que $1/10^4$.

    (b) $\cos(3°)$ con error menor que $1/10^2$.

    (c) $\ln \frac{2}{3}$ con error menor que $1/10^3$.

27. Aplicando la fórmula de Taylor, calcular los límites de las expresiones:

    (a) $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}$

    (b) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2(1+x) - \sin^2(x)}{1 - e^{-x^2}}$

28. Sea $f(x) = 2x - x\sin x - (\cos x)^2$.

    (a) Comprobar que f tiene por lo menos dos ceros.

    (b) Encontrar un mínimo local.

29. *Regla de L'Hopital.* Calcular los siguientes límites:

    (a) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^n - 1}$

(b) $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x)}{\sqrt{1-\cos(x)}}$

(c) $\lim_{x\to +\infty} x^n e^{-x}$

(d) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^n}$

(e) $\lim_{x\to 1} \frac{2}{x^2-1} - \frac{1}{x-1}$

(f) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

(g) $\lim_{x\to 0^+} (\frac{1}{x})^{\sin x}$