Análisis I - Práctica 4

1. Hallar los valores de x para los cuales convergen las series:
   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$
   (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n^2}$
   (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+\sqrt{n}}$
   (d) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin(\frac{x}{3^n})$
   (e) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$
   (f) $\sum_{n=1}^{\infty} n!(x+1)^n$

2. Escribir los primeros cuatro términos del desarrollo en serie de potencias de x de las funciones:
   (a) $\tan(x)$
   (b) $e^{\cos(x)}$
   (c) $ln(1+e^x)$
   (d) $(1+x)^x$

3. Calcular la serie de Maclaurin de las siguientes funciones: e^x, e^{x^2}, e^{-x^2}, a^x y $\sin x$.

4. Aprovechando las fórmulas del desarrollo en serie de potencias de las funciones $e^x, \sin(x), \cos(x), \ln(1+x), (1+x)^\alpha$ desarrollar en series de potencias las siguientes funciones y determinar los radios de convergencia:
   (a) $\frac{1}{1-x}$
   (b) $\sqrt{1+x}$
   (c) $\frac{1}{10+x}$
   (d) $\frac{1}{1+x^2}$
   (e) $\cos^2(x)$
   (f) $(1+x)e^{-x}$
   (g) $\frac{1}{4-x^4}$
   (h) $\frac{e^x-1}{x}$
   (i) $\frac{1}{(1+x)^2}$
   (j) $\arctan(x)$
   (k) $\frac{x}{(1+x^2)^2}$

5. Hallar la suma de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ para $|x| < 1$. Rta: $\frac{x}{(1-x)^2}$.

6. (a) Calcular el desarrollo en serie de $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, indicando el radio de convergencia.

   (b) Comprobar que con el desarrollo anterior, se puede escribir $\ln(a)$ como una serie convergente de número racionales, cualquiera sea $a \in \mathbb{N}$. Escriba una fórmula para $\ln(5)$.

7. Calcular:

   (a) $\cos(10°)$ con error menor que 10^{-4}.

   (b) $\sin(18°)$ con error menor que 10^{-3}.

   (c) $\arctan(1/5)$ con error menor que 10^{-4}.

   (d) $\ln(5)$ con error menor que 10^{-3}.

   (e) $\sqrt{e}$ con error menor que 10^{-4}.

   (f) $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ con error menor que 10^{-4}.

8. En cada caso desarrollar en serie de potencias las funciones f y $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt$ y aproximar,

   (a) $\int_0^1 f(x)\, dx$ con error menor que 10^{-4}, $f(x) = e^{-x^2}$,

   (b) $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx$ con error menor que 10^{-3}, $f(x) = \frac{\arctan x}{x}$,

   (c) $\int_0^1 f(x)\, dx$ con error menor que 10^{-4}, $f(x) = \cos(\sqrt{x})$.

9. Desarrollando en serie de potencias de x integrar las siguientes ecuaciones diferenciales y definir el dominio de aplicación de la solución obtenida.

   (a) $y' + xy = 0, \quad y(0) = 0$

   (b) $y'' + xy' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

   (c) $y'' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
   ¿De qué función es éste el desarrollo en serie de potencias de x?

10. Encuentre los primeros cuatro términos distintos de cero del desarrollo en serie de potencias de x de las siguientes ecuaciones

    (a) $y'' = x + y^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

    (b) $y' = x^2y + y^3, \quad y(0) = 1$

    (c) $y'' = xy^2, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$

11. Para todos los valores reales de $p > 0$, estudiar la convergencia o divergencia de las integrales:

(a) $\int_1^{+\infty} x^p dx$

(b) $\int_0^1 x^p dx$

(c) $\int_0^{+\infty} x^p dx$
Sugerencia: dividir los valores de p de la siguiente manera: $0 < p < 1, p = 1$ y $p > 1$.

12. Analizar la convergencia de las siguientes integrales:

(a) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

(b) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^2(x)}$

(c) $\int_0^{+\infty} e^{-kx} dx$

(d) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^6} dx$

(e) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} dx$

(f) $\int_{-1}^{3} \frac{dx}{(1-x)^3} dx$

(g) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2x) dx$

(h) $\int_0^4 \frac{x}{x^2-4} dx$

(i) $\int_0^1 (\ln x)^2 dx$

(j) $\int_0^{+\infty} x \cdot e^{-x} dx$

(k) $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} dx$

13. Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

(a) Si $f(x)$ es una función continua y positiva tal que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a > 0$, entonces $\int_0^{+\infty} f(x) dx = +\infty$.

(b) Si $f(x)$ es una función continua y positiva tal que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a > 0$, entonces $\int_0^{-\infty} f(x) dx = -\infty$.

(c) Si $f(x)$ es una función continua y decreciente con $\int_4^{+\infty} f(x) dx = 3$, entonces $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

(d) Si $f(x)$ es una función continua y positiva con $\int_4^{+\infty} f(x) dx = 8$, entonces $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

(e) Si $f(x)$ es una función continua y positiva tal que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, entonces $\int_0^{+\infty} f(x) dx < +\infty$.