

Análisis I - Práctica 5

1. Dado $x \in \mathbb{R}^n$ se define $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$

(a) Pruebe que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se verifican las siguientes desigualdades:

- i. $|x_i| \leq \|x\| \quad \forall i = 1, \dots, n$
- ii. $\|x\|^2 \leq n \cdot (\max \{|x_i| : i = 1, \dots, n\})^2$
- iii. $\max |x_i| \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \max |x_i|$.

Describa geoméricamente esta doble desigualdad.

(b) Usando a) concluya que:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{n} \max |x_i| < r\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \max |x_i| < r\}$$

(c) Pruebe que son equivalentes para $A \subset \mathbb{R}^n$:

- i. A es abierto.
- ii. $\forall y \in A, \exists r > 0 / \{x \in \mathbb{R}^n : \max |x_i - y_i| < r\} \subseteq A$

2. (a) Pruebe que los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 son abiertos

- i. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 7\}$
- ii. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y > 1\}$
- iii. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \text{ ó } y \neq 0\}$

(b) Dé un ejemplo de un conjunto en \mathbb{R}^3 que no sea ni abierto ni cerrado.

3. Para cada uno de los siguientes conjuntos $A \subset \mathbb{R}^3$, calcule $Fr(A)$, \bar{A} , $\bar{A} - A$ y $A - Fr(A)$:

- (a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
- (b) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \text{ y } z < 2\}$
- (c) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \text{ y } x^2 + y^2 + (z + 1)^2 < 1\}$
- (d) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \text{ y } x^2 + y^2 < 1/2\}$

4. Determine cuáles de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 son cerrados y acotados:

- (a) $K_1 = B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$
- (b) $K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
- (c) $K_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y > 0\}$
- (d) $K_4 = \{(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$
- (e) $K_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \text{ e } y = 0\}$

5. En cada caso encuentre una sucesión de puntos de A tal que ninguna subsucesión converja a un punto de A :

(a) $A = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$

(b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \text{ e } y > 0\}$

6. Dé el dominio de definición para cada una de las siguientes funciones y grafíquelo:

(a) $f(x, y) = \ln \{(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)\}$

(b) $f(x, y) = \sqrt{6 - (2x + 3y)}$

(c) $f(x, y) = \frac{1}{x}$

(d) $f(x, y) = x^y$

(e) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \sqrt{y-x^2}$

(f) $f(x, y) = \frac{\ln(1-y+x^2)}{\sin(x)}$

(g) $f(x, y) = \int_x^y \frac{1}{1+t^2} dt$

(h) $f(x, y) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-x^2+y^2}}$

(i) $f(x, y) = \frac{\sin(x^2y)}{\ln(1-x^2)}$

7. Encuentre las curvas de nivel de las siguientes funciones:

(a) $z = x + y$

(b) $z = x^2 + y^2$

(c) $z = \sqrt{x \cdot y}$

(d) $z = \frac{y}{x^2}$

(e) $z = x^2 - y^2$

8. Estudie las superficies de \mathbb{R}^3 representadas por las siguientes ecuaciones y diga cuáles de estas superficies son la gráfica de una función $z = f(x, y)$.

(a) $z = 2x^2 + y^2$

(b) $z^2 = 1 - x^2 - \frac{y^2}{2}$

(c) $z = \frac{1}{x^2+y^2}$

(d) $3x + 2y - z = 0$

(e) $z = x^2y^2 + 1$

(f) $z^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} - 2$

(g) $6x^2 + y^2 - z^2 = 1$

(h) $z = \frac{y}{\sqrt{x}}, x > 0$

9. Encuentre las superficies de nivel de las siguientes funciones:

(a) $u = x + y + z$

(b) $u = x^2 + y^2 - z^2$

(c) $u = x^2 + y^2 + z^2$

(d) $u = x^2 + 2y^2$

10. (a) Usando sólo la definición de límite demuestre que:

i. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} x + y = 1$

ii. $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,8)} x \cdot y = -8$

(b) Para cada $\varepsilon = 1, \varepsilon = 1/100, \varepsilon = \alpha^2$ encuentre $\delta > 0$ tal que

$$\|(x, y) - (-1, 8)\| < \delta \implies |x \cdot y + 8| < \varepsilon$$

11. Pruebe que:

(a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (7,2)} x^2 + y^2 - xy = 39$

(b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} xe^{xy} = 0$

(c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \frac{y^2 + \cos(\pi - x)}{y} = \frac{8}{3}$

(d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \sin(x \cdot \cos y) = 0$

(e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (c,0)} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 - y^2} = 0$ con $c \neq 0$

(f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} ye^x = 1$

12. (a) Sea $f : B_r(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0$. Pruebe que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{\sin(f(x, y))}{f(x, y)} = 1$$

(b) Sea $f : B_r(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = +\infty$. Pruebe que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{\ln(f(x, y))}{f(x, y)} = 0$$

(c) Calcule:

i. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

ii. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}$

iii. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$

13. Analice la existencia de los límites restringidos a los ejes coordenados y del límite doble de las siguientes funciones en el origen:

$$(a) f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$$

$$(b) f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$

$$(c) f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$(d) f(x, y) = \frac{\sin x}{y}$$

$$(e) f(x, y) = |x|^y$$

$$(f) f(x, y) = \frac{\sin(x^2+y^2)}{xy+y-x}$$

$$(g) f(x, y) = \frac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$$

$$(h) f(x, y) = (x^2 + y^2)^{x^2y^2}$$

$$(i) f(x, y) = \frac{x^2y^2-x^2+1}{x^2-y^2}$$

$$(j) f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$(k) f(x, y) = \frac{xy}{|x|+|y|}$$

$$(l) f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$$

$$(m) f(x, y) = x \sin\left(\frac{\pi}{y}\right) + y \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$$

$$(n) f(x, y) = \sin\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$(o) f(x, y) = \frac{e^{x(y+1)}-x-1}{|x-y|}$$

14. Demuestre que las siguientes funciones tienden a cero si (x, y) se aproxima al origen a lo largo de cualquier recta, pero para ninguna de ellas existe el límite cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

$$(a) f(x, y) = \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$$

$$(b) f(x, y) = \frac{x^2}{x^2+y^2-x}$$

$$(c) f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

15. Estudie la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados

$$(a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{en } (1, 0) \text{ y } (0, 0)$$

$$(b) f(x, y) = \begin{cases} |y|^x (1+x)^y & (x, y) \neq (0, 0) \text{ y } x > -1 \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad \text{en } (1, 0) \text{ y } (0, 2)$$

$$(c) f(x, y) = \sin(x \cos y) \text{ en } (1, 1) \text{ y } (0, 2)$$

$$(d) f(x, y) = \begin{cases} x + y & x \neq 0 \text{ e } y \neq 0 \\ 1 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \text{en } (0, 0) \text{ y } (1, 1)$$

$$(e) f(x, y) = \begin{cases} 1 & xy \neq 0 \\ 0 & xy = 0 \end{cases} \quad \text{en } (1, 0) \text{ y } (-1, 2)$$

16. Dada la función $f(x, y) = x \cdot y \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin\left(\frac{1}{y}\right)$

(a) Calcular su dominio

(b) Definirla si es posible en $\mathbb{R}^2 - \text{Dom}(f)$ de modo que resulte continua en todo \mathbb{R}^2 .

17. Encuentre los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

(a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$

(b) $f(x, y) = \frac{1}{1-x^2-y^2}$

(c) $f(x, y) = |y|$

(d) $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{x-y}$

(e) $f(x, y) = \frac{xy+1}{x^2-y}$

(f) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

18. Demuestre que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

es continua respecto de cada una de las variables por separado pero no lo es como función de ambas.

19. Estudie la continuidad de las siguientes funciones:

(a) $f(x, y) = (x^2, e^x)$

(b) $f(x, y) = \left(\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} \right)$

20. Sea $f : \{(x, y) : x \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{x^2y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\sin(xe^y)}{2x}$$

Calcule $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,b)} f(x, y)$, donde b es cualquier número real.

21. (a) Sea $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \frac{1}{1-\|(x,y)\|}$. Pruebe que f es continua y no es acotada.
- (b) Sea $g : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x, y) = \|(x, y)\|$. Pruebe que g es continua y acotada pero no alcanza su máximo en $B_1(0)$.
22. Sea $f(x, y) = \frac{\sin(x^2 y)}{\ln(1-x^2)}$
- (a) Encuentre el dominio D de f y gráfiquelo.
- (b) Dado $q = (q_1, q_2) \in Fr(D)$. ¿Existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (q_1, q_2)} f(x, y)$?