Análisis I - Matemática 1 - Análisis Matemático I

Resolución del Primer Parcial (12/05/07) (Tema 2)

Por el tema 1 preguntar a Enzo Gentile

Bueno gente, a pedido de numeroso público, acá tenemos una versión resuelta del parcial. En los casos en los que vimos o encontramos dos posibles soluciones entendibles, o interesantes, o lindas, pusimos las dos. La idea es que esto está escrito como nos gustaría que se escriba un exámen, salvo las acotaciones entre corchetes, que esas son para señalar algunos problemas que vimos en varios parciales, y nos parece que es necesario comentarlas. Obviamente, no debería hacer falta aclarar que estas son sólo algunas formas de resolver los ejercicios, y nadie va a opinar que está mal hacerlo de otra manera, siempre que sea correcta. Por citar una frase trillada (y no muy cierta, pero tampoco muy falsa) hay tantas formas de resolver un ejercicio como personas que lo resuelvan...

1. Analizar la convergencia de la integral impropia:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{(x-1)^3}} \quad dx$$

Resolución: Vamos a resolverlo de dos formas distintas. El primer paso, para que todo tenga un mejor aspecto es el siguiente. Hacemos la sustitución $u = x-1$, $du = dx$. Entonces nos queda

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{(x-1)^3}} \quad dx = \{u = x-1;\ du = dx\} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{u}+\sqrt{u^3}} \quad dx$$

[notar que el límite inferior cambió de 1 a 0, por el cambio de variable]

Ahora hay dos opciones posibles. Vamos a ver cada una por separado:

Solución 1: El integrando no está determinado ni en el límite inferior ni el superior, es decir, hay un problema de definición en ambos extremos. Cuando pasa esto, elegimos un punto intermedio (que suele ser 1 por comodidad, pero puede ser $\frac{\sqrt{32}}{\pi} > 1$ y está todo bien) y separamos la integral de la siguiente manera.

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{u}+\sqrt{u^3}} \quad dx = \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{u}+\sqrt{u^3}} \quad dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{u}+\sqrt{u^3}} \quad dx$$

Ahora basta ver que cada una de estas integrales converge. Notar que el integrando $\dfrac{1}{\sqrt{u}+\sqrt{u^3}} = \dfrac{1}{\sqrt{u}(1+\sqrt{u^2})} = \dfrac{1}{\sqrt{u}(1+|u|)} = \dfrac{1}{\sqrt{u}(1+u)}$ [el módulo desaparece porque estamos considerando $u \geq 0$].

Esto da una pauta de cómo seguir. Haciendo comparación con $\dfrac{1}{\sqrt{u}}$ cerca de 0, vemos que

$$\lim_{u\to 0} \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{u}(1+u)} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{1+u} = 1$$

Luego, como $\int_0^1 \dfrac{1}{\sqrt{u}} \quad dx < \infty$, la primera integral converge. Además

$$\lim_{u\to \infty} \frac{\sqrt{u^3}}{\sqrt{u}(1+u)} = \lim_{u\to \infty} \frac{u}{(1+u)} = 1$$

Como $\int_1^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{u^3}} \quad dx < \infty$ la segunda converge y la suma converge. Luego la integral converge.

Solución 2: Habiendo llegado a que

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{u}+\sqrt{u^3}} \quad dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{u}(1+u)} \quad dx$$

hacemos otra sustitución, llamando $t = \sqrt{u}$; $dt = \frac{1}{2\sqrt{u}}dx$. Efectuando la sustitución, queda la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{2}{(1+t^2)} \quad dt = 2\arctan t \overset{\infty}{0} = \pi < \infty.$$

Luego, la integral converge □.

2. Sea $f(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{e^{x+2}}$

   a) Obtener la serie de Taylor de f centrada en $x_0 = -2$ y encontrar su radio de convergencia.

   Solución: Recordemos que la serie de Taylor de $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, y que la serie centrada en -2 es simplemente una serie de pontencias de $(x-(-2)) = (x+2)$, es decir algo de la pinta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n$. Entonces empezamos así:

$$\frac{x^2+4x+4}{e^{x+2}} = (x+2)^2 e^{-(x+2)} = (x+2)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-(x+2))^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+2)^{n+2}}{n!} =$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(x+2)^n}{(n-2)!}$$

   Fíjense que llegamos a una serie de potencias de (x+2) que coincide con la función en todos los puntos en los que la serie converge, que son ¡todos!, porque la serie de e^x converge absolutamente para todo valor de x.
   Pero la serie de Taylor es una serie como esta, y además es única, no hay dos series de la pinta de la serie de Taylor que cumplan con estas propiedades. Luego, esta serie ES la serie de Taylor de la función $\frac{x^2+4x+4}{e^{x+2}}$.
   □

   b) Estimar $f(-\frac{7}{4})$ con error menor que $\frac{1}{10^3}$.

   Solución: Reemplazando $\frac{-7}{4}$ en la serie encontrada en 1, vemos que queda

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-2)!}(-\frac{7}{4}+2)^n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-2)!}\frac{1}{4^n}.$$

   Tenemos que el término general es de la pinta $a_n = \frac{(-1)^n}{(n-2)!}\frac{1}{4^n}$. Al ser $\frac{1}{(n-2)!}\frac{1}{4^n} > 0$ la serie es alternada, y tenemos que $|a_{n+1}| = \frac{1}{(n-1)!4^{n+1}} = \frac{1}{4(n-1)}\frac{1}{(n-2)!4^n} < \frac{1}{(n-2)!4^n} = |a_n|$ (esto porque $\frac{1}{4(n-1)} < 1$ si $n > 2$). Es decir, el módulo del término general es decreciente.
   Luego, por el criterio de Leibnitz basta encontrar un N tal que $|a_{N+1}| < \frac{1}{10^3}$. Haciendo la prueba, vemos que con N = 4 alcanza, pues $|a_5| = \frac{1}{3!4^5} = \frac{1}{6 \cdot 1024} < \frac{1}{10^3}$. Luego basta tomar

$$\sum_{n=2}^{4} \frac{(-1)^n}{(n-2)!}\frac{1}{4^n} = \frac{1}{16} - \frac{1}{64} + \frac{1}{512} = \frac{25}{512} \approx 0,04882$$

   [El resultado que da por ejemplo mi calculadora con precisión de 12 decimales es 0.048675048941. Notar que el error es del orden de 0,00015, y $|a_5| \approx 0,00016$] □.

3. *a*) Estudiar para cada valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergencia absoluta y condicional de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{\alpha n}}{\sqrt{n}}$$

   Solución: En este caso era posible aplicar tanto el criterio de Cauchy como el de d'Alembert, y ambos llevaban a la solución. Veamos:
   El termino general es $a_n = (-1)^n \frac{e^{\alpha n}}{\sqrt{n}}$, con lo cual $|a_n| = \frac{e^{\alpha n}}{\sqrt{n}}$.

- *d'Alembert:* Tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{e^{\alpha(n+1)}}{\sqrt{n+1}}}{\frac{e^{\alpha n}}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\alpha(n+1)}\sqrt{n}}{e^{\alpha n}\sqrt{n+1}}=\lim_{n\to\infty}e^{\alpha(n+1-n)}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=$$

$$=e^{\alpha}\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}}=e^{\alpha}$$

- *Cauchy:* Tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{e^{\alpha n}}{\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{e^{\alpha n}}}{\sqrt[n]{n^{\frac{1}{2}}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\alpha}}{n^{1/2n}}=e^{\alpha}.$$

[*Recuerdo:* Recordemos qué dicen ambos criterios: si el límite calculado es menor que 1, la serie converge absolutamente, y por lo tanto converge (a secas); si el límite es mayor que 1, la serie diverge de la peor manera: el término general no tiende a cero. El criterio de Cauchy y d'Alembert completos afirman que si el respectivo límite da mayor que 1, entonces $\lim_{n\to\infty}|a_n|\neq 0$, lo cual basta para concluir que $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$, y la serie no puede ser convergente) y si el límite da 1, los criterios no nos dicen nada]

Recordando que el logaritmo es una función creciente, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=e^{\alpha}<1\iff \alpha=\ln e^{\alpha}<\ln 1=0.$$

Luego la serie converge absolutamente cuando $\alpha<0$. Por otro lado

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=e^{\alpha}>1\iff \alpha=\ln e^{\alpha}>\ln 1=0.$$

Luego la serie no converge cuando $\alpha>0$.
Falta analizar el caso en que el límite da 1, es decir $\alpha=0$, que es cuando Cauchy y d'Alembert no nos dicen nada. En este caso, $e^{\alpha}=1$, y la serie es simplemente

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^{0n}}{\sqrt{n}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Esta es por supuesto una serie alternada, y serie alternada nos lleva a aplicar el criterio de Leibnitz... Veamos
(α) La serie es alternada, obviamente.
(β) Tenemos que $|a_n|=\dfrac{1}{\sqrt{n}}\longrightarrow 0$
(γ) tenemos que $|a_{n+1}|<|a_n|\iff \frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n}}\iff \sqrt{n}<\sqrt{n+1}$ (como estamos entre números mayores que cero, la función x^2 esc creciente, por lo que elevando al cuadrado ambos lados se conserva la desigualdad) $\iff n<n+1$, lo cual es cierto, luego la sucesión es decreciente.
Podemos concluir que por Leibnitz la serie converge.
Para la convergencia absoluta, basta notar que $|a_n|=\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{n}\iff n>\sqrt{n}$, y siendo esto último cierto, tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Como esta última diverge, la serie de los valores absolutos diverge. Por lo tanto, la convergencia de la serie original es condicional. □

b) Estudiar para cada valor de $\alpha\in\mathbb{R}$ la convergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)\operatorname{sen}(\frac{1}{\sqrt{n}})}{n^{\alpha}+3}$$

Solución: El término general de esta serie (llamémosla S) está lleno de cosas feas, como logaritmos, senos compuestos con inversas de raices cuadradas y etc. La idea sería ver el comportamiento del termino general de la serie "para n grande", y tratar de hacer desaparecer algunas de esas cosas feas. Vamos por partes, dijo el descuartizador:
Sabemos que $\lim_{n\to\infty}\sin(\dfrac{1}{\sqrt{n}})\dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=1$ y por tanto $\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\sim\frac{1}{\sqrt{n}}=n^{-1/2}$ Fíjense que esto es básicamente reemplazar $\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$, que es algo que no sabemos muy bien como controlarlo (¿es creciente todo el tiempo, oscila? ¿cómo va el

gráfico?, etc.) por $\frac{1}{\sqrt{n}}$, que es un bicho que conocemos bien. Ahora, con la misma idea, nos metemos con el resto de los términos. ¿Qué pasa con ese $n^\alpha+3$? Notar que si $\alpha>0$, cuando n sea grande, n^α va a ser grande, porque la potencia es positiva, y cuando n^α sea grande, el 3 no va a hacer ninguna diferencia. Ahora, si $\alpha<0$, estamos agarrando n, que se hace muy grande, y elevándolo a una potencia negativa, así que eso se hace muy chico, y entonces ¡a la larga sólo importa el tres!. Finalmente, si $\alpha=0$, entonces $\frac{1}{n^\alpha+3}=1/4\forall n$. Tomando límite, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha+3}{n^\alpha}=\begin{cases}1 & si \quad \alpha>0\\ 1/4 & si \quad \alpha=0\\ 1/3 & si \quad \alpha<0\end{cases}$$

Observacion extra:

$$n\geq 1\Rightarrow\frac{\ln(n)\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{n^\alpha+3}\geq 0$$

¿Por qué es esto? Tanto el logarítmo como la potencia son siempre números positivos, así que falta ver el seno, y este es positivo porque el seno es positivo en el primer cuadrante (es decir, $x\in[0,\pi/2]\Rightarrow\sin x>0$, y $0<1/\sqrt{n}\leq 1<3/2<\pi/2$). Entonces resulta que efectivamente, todos los términos son positivos, y podemos comparar sin preocuparnos por poner módulo. Como el comportamiento de la serie es distinto si $\alpha>0$, $\alpha=0$ o $\alpha<0$ separo esos tres casos, y usando los límites que ya calculamos, tenemos que:

Caso 1: ($\alpha<0$)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{n^\alpha+3}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\cdot\frac{1}{n^\alpha+3}=\frac{1}{3}$$

Caso 2: ($\alpha=0$)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{n^0+3}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\ln(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\cdot\frac{1}{1+3}=\frac{1}{4}$$

Vemos que en ambos casos, S converge si y sólo si $\sum\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}$ converge. Esta última serie es claramente divergente, lo que se puede ver comparando con $\sum\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Caso 3: ($\alpha>0$)

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n)\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{n^\alpha+3}\cdot\frac{n^{\alpha+1/2}}{\ln(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}\cdot\frac{n^\alpha}{n^\alpha+3}=1\in(0,\infty)$ Del analisis hecho hasta el momento, puede verse que alcanza con estudiar la convergencia de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ pues esta última se comporta igual que nuestra serie.

Está claro que si $\alpha\leq\frac{1}{2}$ la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ no puede ser convergente. Esto se ve por comparación directa con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ que es claramente divergente pues el exponente de n es menor o igual que 1. . La parte más difícil es ver que si $\alpha>\frac{1}{2}$, el logaritmo del numerador "no molesta". Es una vez más la idea de que $\ln(n)$ pierde con cualquier potencia de n. Veamos cómo justificar bien esto. Supongamos que $\alpha>\frac{1}{2}$. Como la desigualdad es estricta, podemos elegir un número β tal que $\frac{1}{2}<\beta<\alpha$. También sabemos (esto se puede usar sin demostrar) que existe un $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $\ln(n)\leq n^{\alpha-\beta}$ para todo $n\geq n_0$ pues $\alpha-\beta>0$. Entonces,

$$\frac{\ln(n)}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}\leq\frac{n^{\alpha-\beta}}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}=\frac{1}{n^{\beta+\frac{1}{2}}}\qquad\text{para todo } n\geq n_0.$$

Como $\beta>\frac{1}{2}$, resulta que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\beta+\frac{1}{2}}}$ converge. Por comparación con esta última serie, nos queda que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n)}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ converge para todo $\alpha>\frac{1}{2}$.

Conclusion: La serie S converge sólo para $\alpha\in(\frac{1}{2},+\infty)$

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la siguiente función:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4(x+1)}{|x+1|^3 + 2\,|y|^3} & (x,y) \neq (-1,0) \\ 1 & (x,y) = (-1,0) \end{cases}$$

a) Probar que f no es continua en $(-1,0)$.

Solución: Veamos algunos límites por rectas [un detalle... muchos tomaron la recta $y = x$ o $y = mx$ o por $x = 0$ con y tendiendo a 0... fíjense que en este caso, el punto al que nos queremos acercar es el $(-1,0)$, y ¡ninguna recta de la forma $y = mx$ pasa por este punto (ni hablar si tomamos x = 0)!].
Una recta conveniente es, por ejemplo, y = 0, y reemplazando y = 0, tomamos límite cuando x tiende a -1.

$$\lim_{(x,0)\to(-1,0)} \frac{y^4(x+1)}{|x+1|^3 + 2\,|y|^3} = \lim_{x\to -1} \frac{0^4(x+1)}{|x+1|^3 + 2\,|0|^3} = \lim_{x\to -1} 0 \frac{(x+1)}{|x+1|^3} = \lim_{x\to -1} 0 = 0.$$

[Dos cosas: uno, no importa que en el límite quede una indeterminación por cero, porque nos estamos fijando en puntos en los que $x \neq -1$, y en todo el camino por el que nos acercamos la función vale cero. Dos, ¡con esto basta para ver que la función no es continua! Encontraron un camino por el que se acercan a (-1,0) y $\lim_{(x,0)\to(-1,0)} f(x,y) \neq f(-1,0)$. ¡Luego, la función no puede ser continua! muchos probaron con acercarse después por la recta x = -1 (o variantes más exóticas). Fíjense que no importaba lo que diera este límite, ya la función queda discontinua porque hay un camino por el que nos acercamos, y el límite difiere del valor de la función ahí].

Para los que quieran ver otro límite, si nos acercamos por x = -1, tenemos que

$$\lim_{(-1,y)\to(-1,0)} \frac{y^4(x+1)}{|x+1|^3 + 2\,|y|^3} = \lim_{y\to 0} \frac{y^4(-1+1)}{|-1+1|^3 + 2\,|y|^3} = \lim_{x\to -1} \frac{y^4 0}{0^3 + 2\||y|^3} = \lim_{y\to 0} 0 \frac{y^4}{2|y|^3} = 0.$$

Otra vez, sólo importa lo que pasa cerca del 0, pero no en el cero, y como en estos puntos la función vale 0, el límite da 0. Además, esto nos motiva a pensar que es posible que el límite doble (es decir, con (x,y) tendiendo simultáneamente a (-1,0)) da 0. □

b) Redefinirla en $(x,y) = (-1,0)$, si es posible, de manera tal que resulte continua en $\mathbb{R}^2$

Solución: La redefino: f(x,y) = 0 en todas partes y ya está, queda continua. Uy, no, Nino me mata si pongo esto, a ver...
Ya vimos que los límites por un par de rectas daban cero, así que probemos con redefinirla en (-1,0) como 0.

[Fíjense que si va a quedar continua, 0 es la única elección posible. Pueden convencerse hasta el hartazgo de que acercándonos por rectas, parabolas, cúbicas, cónicas o trayectorias tangenciales al campo gravitatorio que emana el punto (-1,0), el límite da cero. Acá les muestro que efectivamente el límite por todos los caminos da 0]

Para ello, tenemos que ver que si yo tomo un $\epsilon > 0$, tengo un $\delta > 0$ que hace que la función sea pequeña cuando (x,y) está a menos de δ del punto (-1,0). Planteamos tentativamente $||(x,y)-(-1,0)|| = ||(x+1,y)|| < \delta$. Vamos a sacarle un poco de jugo a esto.
Notar que como $|x+1|$ y $|y|$ son ambos menores que la norma, queda que $|x+1| < \delta, |y| < \delta$. Un poco más interesante es la siguiente desigualdad. Recordemos que $|x| \leq ||(x,y)|| \leq \sqrt{2}\,\{max|x|,|y|\}$. ¡Esta es la desigualdad que nos permite acotar denominadores!

[Muchos tienen problemas acotando el denominador. No se olviden que la función $g(t) = t^{-1}$ es *decreciente,* así que al dar vuelta las fracciones, las desigualdades *se invierten* . No puedo decir que como $|y| < \delta$, entonces $1/|y| < 1/\delta$. En realidad,lo correcto es que $|y| < \delta \Rightarrow 1/|y| > \delta$ y nosotros queremos acotar $1/|y|$ para que sea chiquito, no más grande que alguna cantidad...]

Veamos como usarla:

$$|\frac{y^4(x+1)}{|x+1|^3 + 2\,|y|^3}| = \frac{|y^4||(x+1)|}{||x+1|^3 + 2\,|y|^3|} < \frac{||(x+1,y)||||(x+1,y)||^4}{|x+1|^3 + 2\,|y|^3}(\clubsuit)$$

[Acá es donde muchos se trabaron, porque reemplazaron la norma por $\leq \delta$ y no supieron qué hacer con el denominador: Fíjense que necesitamos acotar el denominador por *algo más chico* , para finalmente poner un ϵ adelante de todo y sacar una condición sobre el δ. En general mi consejo es esperar hasta no tener nada que acotar en el denominador y recién acotar por δ, pero eso varía según a quién le pregunten, y no les van a poner mal si finalmente lo hacen bien...].

Seguimos así:

$$|x+1|^3 + 2|y|^3 \geq max\left\{|x+1|^3; |y|^3\right\} \geq \frac{||(x+1,y)||^3}{\sqrt{2}} \Rightarrow |x+1|^3 + 2|y|^3 \geq \frac{||(x+1,y)||^3}{\sqrt{2}},$$

de lo que se deduce que

$$\frac{1}{|x+1|^3 + 2\;|y|^3} \leq \frac{\sqrt{2}}{||(x+1,y)||^3}$$

(porque al invertir las fracciones, la desigualdad se da vuelta). Volviendo a $\clubsuit$:

$$||(x+1,y)|| \cdot ||(x+1,y)||^4 \frac{1}{|x+1|^3 + 2\;|y|^3} \leq ||(x+1,y)||^5 \frac{\sqrt{2}}{||(x+1,y)||^3} = \sqrt{2}||(x+1,y)||^2 < \sqrt{2}\delta$$

Fíjense que sólo al final de todo, cuando ya acoté todo y no queda nada en el denominador salvo constantes, recién ahí acoto la norma por δ. Para que esto quede más chico que ϵ, basta tomar $\delta < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}$. $\square$