Análisis I - Práctica 0

Primer Cuatrimestre de 2007.

Ejercicios de repaso

1. Resolver las siguientes inecuaciones:

   (a) $|x+3| < 1$ (d) $|3x-1| < |x-1|$

   (b) $|x| > |x+3|$ (e) $\left|\dfrac{x-2}{3x+1}\right| \leq 1$

   (c) $|x-3| \geq 1$

2. Representar los siguientes conjuntos en $\mathbb{R}$:

   (a) $\{x : |x-1| < 1, x \notin \mathbb{Z}\}$ (b) $\{x : |x-3| < |2-x|\}$

   (c) $\{x : 0 < x^2 \leq x^3\}$

3. *a*) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados superiormente:
   - I $\mathbb{R}_{>0}$;
   - II $\{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} \text{ con } n = m^2\}$.

   b) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados inferiormente:
   - I $\mathbb{Z}$;
   - II $\{x^{-1} : x < 0\}$;
   - III $\mathrm{Im}(f)$ donde $f(x) = -x^2 + 2x + 1$.

4. Determinar si los siguientes conjuntos poseen supremo, ínfimo, máximo y mínimo. En caso de poseerlos, calcularlos:

   (a) $\{n \in \mathbb{N} : 20 < n \leq 35\}$ (b) $\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

   (c) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ (d) $\{\frac{2n}{7n-3} : n \in \mathbb{N}\}$

5. Estudiar los extremos de los siguientes conjuntos y representarlos en la recta real:

   a) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x+3| + |x-9| > 2\}$;

   b) $B = \{x \in \mathbb{R} : \big||x+2| - |x-1|\big| < 1\}$;

   c) $C = \{x \in \mathbb{R} : |x^3 - 1| + |2 - x^3| = 1\}$.

6. *a*) Probar que el conjunto $A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$ no tiene máximo ni supremo en $\mathbb{Q}$.

   b) Probar que el conjunto $B = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 > 2\}$ no tiene mínimo ni ínfimo en $\mathbb{Q}$.

   Sugerencia: en (a) mostrar explícitamente que, dado $a \in A$, existe un elemento mayor que a en A y en (b) proceder análogamente.

7. Calcular

   (a) $\sup\{\frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$ (c) $\sup\{\frac{\sqrt{n+1}}{10+n} : n \in \mathbb{N}\}$

   (b) $\inf\{(1+\frac{1}{n})^n : n \in \mathbb{N}\}$ (d) $\inf\{n^2 - 9n - 10 : n \in \mathbb{N}\}$

8. Sea $a \geq 0$. Determinar para qué valores de b se verifican cada una de las siguientes condiciones:

(a) $|a+b| = |a| + |b|$ (d) $|a+b| < |a| + |b|$

(b) $|a-b| = |a| + |b|$ (e) $|a-b| < |a| + |b|$

(c) $\big||a| - |b|\big| = |a-b|$ (f) $\big||a| - |b|\big| < |a-b|$

9. ¿A qué distancia de 16 basta tomar x para asegurar que:

(a) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \in (0, \dfrac{1}{2})$? (b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \in (\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{10}, \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{10})$? (c) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} \in (\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{1000}, \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{1000})$?

10. *a*) ¿Qué puede decirse del $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ si
    I $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0$?
    II $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$?

    b) ¿Qué puede decirse de $\lim_{n\to\infty} f(a_n)$ si se sabe: $a_n \to +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = r$?

    c) ¿Qué puede decirse de $\lim_{x\to+\infty} f(x)^{g(x)}$ si
    I $f(x) \to 0$ $(f(x) > 0)$ y $g(x) \to +\infty$?
    II $f(x) \to 1$ y $g(x) \to +\infty$?

11. Analizar la existencia de $\lim_{x\to a} f(x)$ para cada $a \in \mathbb{R}$ siendo:

(a) $f(x) = x - [x]$. (b) $f(x) = \dfrac{x}{[x]}$. (c) $f(x) = |x| + [x]$.

($[x]$ denota la parte entera de x.)

12. Calcular, si existen, los siguientes límites:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x + \sin x}{e^x + \cos x}$ (b) $\displaystyle\lim_{x\to 3^+} \frac{[x^2] - [x]^2}{x^2 - 9}$ (c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x \sin x$

(d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{1/x}}{\ln|x|}$ (e) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$ (f) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+e^x)}{x}$

(g) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/\tan x}$ (h) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \left(\tan^2 x\right)^{\cos^2 x}$ (i) $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{1/x}$

13. ¿Qué se puede decir del $\lim_{x\to a} f(x)$ si

    a) $a = -7$ y $\lim_{x\to -7} (x+7) f(x) = +\infty$?

    b) $a = +\infty$ y $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 4)^2 = +\infty$?

14. ¿Qué información se necesita tener sobre g y h para poder decidir si la función

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & x < 5, \\ -\frac{1}{2} & x = 5, \\ h(x) & x > 5 \end{cases}$$

(a) es continua en $9/2$? (c) es continua en $21/4$?

(b) es continua a derecha en 5? (d) es continua en 5?

15. Para cada una de las siguientes funciones:

   a) Calcular su dominio.

   b) Estudiar la continuidad en cada punto de su dominio. En los puntos de discontinuidad, indicar de qué tipo se trata.

   c) En los puntos que no pertenezcan al dominio, definirla (si es posible) de modo que resulte continua.

$$f_1(x) = \tfrac{1}{2}\sin^2 x \qquad f_2(x) = x^2 - [x^2]$$

$$f_3(x) = [x]\,\sin(\pi x) \qquad f_4(x) = \begin{cases} \cos(\pi x/2) & |x| \le 1 \\ |x-1| & |x| > 1 \end{cases}$$

$$f_5(x) = x\,\arctan\left(\tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{x-1}\right) \qquad f_6(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x < 0 \\ -x^2 + \frac{5}{2}x & x > 1 \end{cases}$$

$$f_7(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x^2} & x > 0 \\ x^2 + 1 & x \le 0 \end{cases} \qquad f_8(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

16. Sea f continua tal que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{Q}$.

   a) Calcular $f(\sqrt{2})$.

   b) Calcular $\mathrm{Im}(f)$.

17. *a*) Demostrar que la ecuación $x\,2^x = 1$ tiene al menos una raíz positiva y menor o igual que 1.

   b) Demostrar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y verifica

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

   entonces debe ser suryectiva.

   c) Sea $f(x) = 3x^7 - 4x^6 - 5x^5 + 3x^4 - \sin x$. Calcular $\mathrm{Im}(f)$.

   d) Probar que todo polinomio de grado impar, tiene al menos una raíz real.

   e) Probar que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua y $f(x) \in \mathbb{Z}$ para todo $x \in \mathbb{R}$, entonces debe ser constante.

18. *a*) Probar que las siguientes ecuaciones tienen al menos una solución en el intervalo indicado:

      I $x^3 - 3x + 1 = 0$ en (1,2).

      II $\cos x = x$ en todo $\mathbb{R}$.

   b) Hallar $a, b \in \mathbb{R}$ tal que el polinomio

$$f(x) = x^9 - 100x^4 + 3x^3 + 12$$

   tenga al menos una raíz real en el intervalo (a, b).

19. *a*) Calcular, usando la definición, la derivada de la función $f(x) = x^2$ en los puntos de abscisa $x = 2$ y $x = -3$.

b) Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes y normales a la curva $y = x^2$ en los puntos indicados en (a).

20. *a*) Hallar las coordenadas de los puntos $P = (x_0, y_0)$ de la curva $y = x^3 - 3x$ cuya recta tangente tenga pendiente igual a 9.

    b) Hallar las coordenadas de los puntos $P = (x_0, y_0)$ de la misma curva cuya recta tangente pase por el origen de coordenadas.

    c) Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes que puedan trazarse desde el origen a la curva $y = -4x^2 + 3x - 1$.

21. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

$$f_1(x) = \frac{2-x}{2+x} \qquad f_2(x) = x\sin x + \cos x$$

$$f_3(x) = \ln|x| \qquad f_4(x) = \sqrt{x} + a^x \ (a > 0)$$

$$f_5(x) = x^{\cos x} \qquad f_8(x) = \begin{cases} x^3 & x > 1 \\ x^2 & x \leq 1 \end{cases}$$

22. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{1/x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

    a) ¿Es f continua en todo $\mathbb{R}$?

    b) Calcular $f'(x)$ para $x \neq 0$.

    c) Analizar la existencia de las derivadas laterales y de la derivada en $x = 0$.

23. *a*) ¿Qué tipo de discontinuidad presenta la función $\sin(1/x)$ en $x = 0$? Demostrarlo.

    b) Idem (a) pero con la función $x\sin(1/x)$. >Se puede definir en $x = 0$ de modo que resulte derivable?

    c) Idem (b) pero con la función $x^2\sin(1/x)$.

24. *a*) Sea $f(x) = x(x-1)(x-2)(x+5)$ probar que $f'(x)$ tiene exactamente tres raíces reales.

    b) Probar que la ecuación $3x^5 + 15x - 8 = 0$ tiene sólo una raíz real.

    c) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida para un $a \in \mathbb{R}$ fijo:

$$f(x) = e^{a^2 x} + x^3 + x.$$

    Probar que $f(x) = 0$ tiene exactamente una solución en el intervalo $[-1, 0]$.

25. La función $y = 1 - \sqrt[5]{x^4}$ se anula sobre los extremos del intervalo $[-1, 1]$. Verificar que la derivada no se anula en ningún punto del intervalo $(-1, 1)$. ¿Qué hipótesis del teorema de Rolle no se cumple?

26. ¿En qué punto de la curva $y = x^n$, la recta tangente es paralela a la cuerda que une los puntos $(0, 0)$ y (a, a^n)?

27. Probar las siguientes desigualdades:

(a) $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x, \quad \forall x \geq 0$ (b) $\sqrt{x} \geq \ln x, \quad \forall x > 0$

(c) $e^x \geq 1 + x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (d) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) \leq x, \quad \forall x > 0$

(e) $1 - \cos x < \frac{x^2}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (f) $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$

28. Si f es una función que satisface que $f'(x) \geq x^2 - \ln x$, entonces f es creciente en la semirrecta abierta $(\frac{1}{2}, +\infty)$.