# Análisis I - Práctica 1

Primer Cuatrimestre de 2007.

## Integrales impropias

1. Calcular:

   *a)* $\displaystyle\int \sin x \, dx.$

   *b)* $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x \, dx.$

   *c)* El área entre las curvas $y = \sin x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 2\pi.$

2. Calcular:

   (a) $\displaystyle\int x \sin x \, dx.$ (b) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos x \, dx.$ (c) $\displaystyle\int x e^{x^2} \, dx.$

   (d) $\displaystyle\int e^x \sin x \, dx.$ (e) $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2+x-2} \, dx.$ (f) $\displaystyle\int \ln x \, dx.$

3. Hallar el área encerrada por las curvas:

   *a)* $y = x^3$ e $y = x$.

   *b)* $y = x^3 - x$ y la recta tangente a esta curva en $x = -1$.

   *c)* $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$ y la recta $y = 12$ entre $x = 0$ y $x = 3$.

4. *a)* Calcular $\displaystyle\int_{-2}^{0} e^x \ dx.$

   *b)* Hallar el área encerrada por las curvas: $y = 0$, $y = -2$, $y = \log x$ y $x = 0$. Sugerencia: Dibujar la región y usar a).

5. Calcular:

   (a) $\displaystyle\int_{-2}^{3} x^2 - 1 \ dx$ (b) $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x^2 - 1| \ dx$ (c) $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x^2 + 1| \ dx$

   (d) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \big||x-1| - |x|\big| \ dx$ (e) $\displaystyle\int_{1}^{4} \sqrt{|x-3|} \ dx$ (f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}(|x|) \ dx$

6. Calcular la derivada de las siguientes funciones:

   *a)* $\displaystyle F(x) = \int_0^x \sqrt{t^2+1} \ dt$

   *b)* $\displaystyle G(x) = \int_{-1}^{\operatorname{sen} x} e^{2t-1} \ dt$

7. *a*) Para todos los valores reales de $p > 0$, estudiar la convergencia o divergencia de las integrales:

$$\text{i. } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx \qquad \text{ii. } \int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx \qquad \text{iii. } \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^p}\,dx$$

*Observación:* Dividir los valores de $p$ de la siguiente manera:
$0 < p < 1,\ p = 1$ y $p > 1$.

*b*) Relacionar los resultados obtenidos con el hecho de que para $x > 0$, $x^{-p}$ y $x^{-\frac{1}{p}}$ son funciones inversas y, por lo tanto, el gráfico de una es el de la otra reflejado respecto de la recta $y = x$.

8. Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

(a) $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\,\ln^2 x}$ (b) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-kx}\,dx$

(d) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{1+x^2}\,dx$ (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ (f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}$

(g) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3}$ (h) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^5}}\,dx$ (i) $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{dx}{(1-x)^3}$

(j) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+\cos x}\,dx$ (k) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2x)\,dx$ (l) $\displaystyle\int_0^{4} \frac{x}{x^2-4}\,dx$

En los ítems (i), (k) y (l) estudiar, además, el valor principal.

9. Decidir si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

*a*) Si $f(x)$ es una función continua y positiva tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a > 0$, entonces $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$

*b*) Si $f(x)$ es una función continua y positiva tal que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = a > 0$, entonces $\displaystyle\int_0^{-\infty} f(x)\,dx = -\infty$

*c*) Si $f(x)$ es una función continua y decreciente con $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(x)\,dx = 3$, entonces el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

*d*) Si $f(x)$ es una función continua y positiva con $\displaystyle\int_4^{+\infty} f(x)\,dx = 8$, entonces el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

*e*) Si $f(x)$ es una función continua y positiva con $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, entonces $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$.

10. Para los distintos valores de $p \in \mathbb{R}$ analizar la convergencia de

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p(1+x^2)}.$$