Análisis I - Práctica 2

Primer Cuatrimestre de 2007.

Series numéricas

1. Hallar la suma de las siguientes series.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6^{n-2}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n-2}}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+n}}$

2. Sabiendo que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ probar que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^2}$ es una serie convergente.

3. *a*) Mostrar que si $x \geq 0$ entonces es válida la desigualdad

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) \leq x.$$

   b) Estudiar la convergencia de las series $\sum \ln(1+\frac{1}{n})$ y $\sum \ln(1+\frac{1}{n^2})$.

   c) Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales que verifica $\lim_{n\to\infty} n^3 a_n = 1$. Probar que la serie $\sum \ln(1+a_n)$ es convergente.

4. Supongamos que la serie $\sum n^2|a_n|$ converge. Entonces

   a) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n| < \dfrac{1}{n^2}$ para $n_0 < n$,

   b) la serie $\sum a_n$ converge.

5. *a*) Supongamos que una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cumple que $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$. ¿Qué se puede decir de la convergencia de $\sum a_n$?

   b) Encontrar una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que la sucesión na_n no converja a 0 y tal que $\sum a_n$ sea convergente.

   c) ¿Es posible obtener el resultado del ítem anterior si la sucesión es de términos no negativos?

6. Estudiar la convergencia de las siguientes series aplicando el Criterio de Comparación:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{10n}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+n}{3+n^2}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+3}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\frac{1}{n})$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ (e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^k}, \quad k \in \mathbb{N}$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

7. *a*) Demostrar que para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}.$$

   b) Consideremos la sucesión cuyo término general está dado por

$$r_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

   Mostrar que $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

8. Mostrar que $\frac{\pi}{4} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$

9. Estudiar la convergencia de las siguientes series aplicando el criterio de la integral

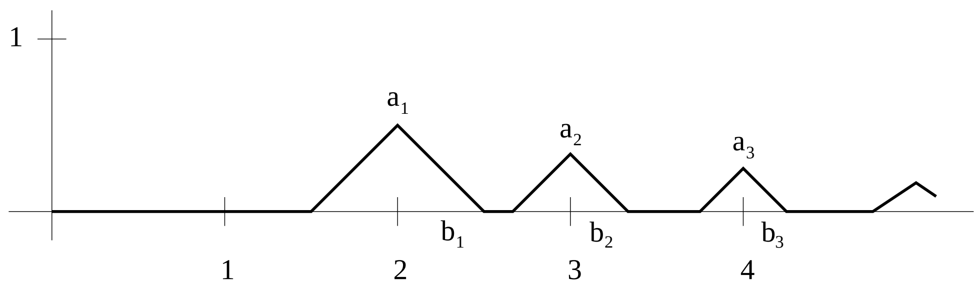
$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2+n} \quad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \quad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \quad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

10. Probar la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln n^{\ln n}}$. (Sugerencia: usar una sustitución adecuada para reducir el problema a probar que la integral $\int_1^{\infty} (e/x)^x dx$ existe.)

11. *a*) Encontrar una función $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ no negativa tal que la integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converja aunque no la serie $\sum_1^{\infty} f(n)$. ¿Algún conflicto con el criterio de la integral?

    b) Concluir que la hipótesis sobre el decrecimiento de la función es realmente necesaria.

    c) Mostrar que la función del ítem a) puede elegirse continua. (Sugerencia: Inspirarse en el gráfico.)



12. Estudiar la convergencia de las series aplicando el criterio del cociente o de la raíz.

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

$$\text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n!}{n^n} \qquad \text{(e)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} \qquad \text{(f)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$$

13. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales cuyos términos satisfacen

$$1 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 2.$$

Probar que las series $\sum \frac{a_n}{n!}$ y $\sum \frac{a_n}{e^n}$ son convergentes.

14. Estudiar la convergencia de las siguientes series sabiendo que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{2^n} = 3$,

$$a) \sum \frac{1}{a_n} \qquad b) \sum \frac{n^2}{a_n} \qquad c) \sum \frac{a_n}{e^n} \qquad d) \sum \frac{3^{n-1}}{a_n}$$

15. Hallar la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 - 4n + 2}{n!}$. (Sugerencia: descomponer el término general en la forma $\frac{A}{n!} + \frac{B}{(n-1)!} + \frac{C}{(n-2)!}$.)

16. Aplicando el Criterio de Leibniz mostrar que las siguientes series alternadas son convergentes. Calcular cuántos términos hay que considerar para que el error que se comete al estimar el valor de la serie por el de la suma de esos términos sea menor que 10^{-6}.

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \qquad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$$

17. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

    a) Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_k$ son dos series divergentes entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_k b_k$ es divergente.

    b) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente de términos positivos entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

    c) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n^2$ no converge.

18. Estudiar la convergencia condicional y absoluta de las series cuyos términos generales se detallan a continuación.

$$\text{(a) } a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 2^n} \qquad \text{(b) } a_n = \arcsin \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad \text{(c) } a_n = \frac{1}{n^{1+1/n}}$$

$$\text{(d) } a_n = (-1)^{n-1} \tan \frac{1}{n\sqrt{n}} \qquad \text{(e) } a_n = (-1)^n \frac{n^2 - 2n - 1}{n!} \qquad \text{(f) } a_n = \frac{e^{1/n} - 1}{n}$$

$$\text{(g) } a_n = \frac{(-1)^n}{\ln n} \qquad \text{(h) } a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \arctan(1/n) \qquad \text{(i) } a_n = \int_n^{n+1} e^{-\sqrt{x}} dx$$