Análisis I - Práctica 3

Primer Cuatrimestre de 2007.

Series de potencias

1. *a*) Probar que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ define una función cuyo mayor dominio de definición es el intervalo real $(-1, 1)$.

   b) Probar que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{2^n}$ define una función cuyo mayor dominio es el intervalo $(-1, 3)$.

   c) Probar que $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$ define una función cuyo mayor dominio es el intervalo $[0, 2)$.

2. Calcular el dominio de cada una de las funciones que se definen por las fórmulas siguientes.

   $(a)\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\qquad (b)\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ $\qquad (c)\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$

   $(d)\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n!\,(x-1)^n$ $\qquad (e)\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-10)^n}{n(n+1)}$ $\qquad (f)\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x^n}{n!}$

   $(g)\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}$ $\qquad (h)\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{n^2} x^{n^2}$ $\qquad (i)\quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n x^n$

3. Estudiar la convergencia de la serie

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n}$$

4. *a*) Calcular la serie de Taylor de las siguientes funciones indicando en cada caso el radio de convergencia.

   $(a)\ e^x \qquad (b)\ e^{-x} \qquad (c)\ e^{x^2} \qquad (d)\ \cos x \qquad (e)\ \sin x \qquad (f)\ x \cdot e^x$

   b) Sin calcular las derivadas en $x = 0$ obtener la serie de Taylor de las siguientes funciones, indicando en cada caso el intervalo de convergencia.

   $(a)\ \dfrac{1}{1-x} \qquad (b)\ \dfrac{1}{1+x} \qquad (c)\ \dfrac{1}{1+x^2} \qquad (d)\ \dfrac{1}{x^2-5x+6}$

   $(e)\ \dfrac{1}{2+3x} \qquad (f)\ \dfrac{1}{(2+x)(x+1)} \qquad (g)\ (1+x)e^{-x} \qquad (h)\ \sinh x$

   $(i)\ \cosh x \qquad (j)\ \cos(2x) \qquad (k)\ \cos(x^2) \qquad (l)\ \cos^2 x$

   c) A partir de los desarrollos anteriores estimar los siguientes números:

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e}}, \quad \sin(10^\circ), \quad \cos(\pi/36)$$

5. Obtener la serie de Taylor alrededor de los puntos que se indican.

$$(a)\ \cos x, \quad x_0 = \pi/4 \qquad (b)\ \tfrac{1}{x}, \quad x_0 = \tfrac{1}{3} \qquad (c)\ \ln x, \quad x_0 = \tfrac{1}{3}.$$

6. Consideremos la función definida por $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$, y $f(0) = 1$. Calcular el valor de la derivada k–ésima de f en 0, es decir calcular $f^{(k)}(0)$.

7. Sea a_n la sucesión definida como

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{1}{3^n} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Mostrar que la sucesión $b_n = \sqrt[n]{a_n}$ no tiene límite. Estudiar la convergencia de la serie $\sum a_n x^n$.

8. Consideremos las serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Mostrar "a mano" que la series $\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$ (obtenida derivando término a término la serie anterior) y $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ (obtenida integrando término a término) tienen el mismo radio de convergencia que la serie inicial.

9. Derivando e integrando series de potencias adecuadas obtener los desarrollos en series de potencias de las siguientes funciones. Por supuesto, hay que calcular en qué intervalos serán válidos estos desarrollos.

   (a) $\arctan x$ $\quad$ (b) $\frac{\arctan x}{x}$ $\quad$ (c) $\ln(1+x)$

   (d) $\ln(1-x)$ $\quad$ (e) $(x+1)\ln(1+x)$ $\quad$ (f) $\ln \dfrac{1+x}{1-x}$

10. Utilizando desarrollos en serie adecuados estimar los siguientes números.

    $a)$ $\ln 2$ con error menor que 0,001 (usar que $\ln 2 = -\ln(1-\frac{1}{2})$).
    $b)$ $\ln 3$ con error menor que 0,01 (usar que $\ln 3 = -\ln(1-\frac{2}{3})$).
    $c)$ $\ln \frac{3}{2}$ con error menor que 0,01.
    $d)$ $\pi/4$ con 1 cifra decimal exacta.
    $e)$ $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\, dx$ con error menor que $0,0001$.
    $f)$ $\int_0^1 e^{-x^2}\, dx$ con error menor a 0,0001.
    $g)$ $\int_0^1 \frac{1-e^{-x}}{4x}\, dx$ con error menor a 0,001.

11. Utilizando algunos desarrollos en serie de potencias conocidos, y que es posible derivar e integrar una serie de potencias dentro de su dominio (es decir, dentro de su intervalo de convergencia) calcular la suma de las series siguientes:

    (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n}$ $\quad$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n n}$ $\quad$ (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$ $\quad$ (d) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+1}(n+1)n}$

12. Recordemos que una función f se dice *par* si $f(x) = f(-x)$ e *impar* si $f(-x) = -f(x)$, para cada x en su dominio (notemos que esto impone ciertas condiciones sobre el dominio de la función). Mostrar que si $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ es una función par entonces $a_n = 0$ para todo n impar y, que si $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ es una función impar, entonces $a_n = 0$ para cada n par.