

Análisis I - Práctica 4

Primer Cuatrimestre de 2007.

Funciones de varias variables. Límite y continuidad

1. Si $x \in \mathbb{R}^n$, ponemos $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.

a) Muestre que si $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

- 1) $|x_i| \leq \|x\|$, si $i = 1, \dots, n$;
- 2) $\|x\| \leq \sqrt{n} \cdot \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$;
- 3) $\max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\} \leq \|x\| \leq \sqrt{n} \max\{|x_i| : 1 \leq i \leq n\}$. Describa geométicamente esta doble desigualdad.

b) Usando lo hecho, concluya que:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{n} \max |x_i| < r\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < r\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \max |x_i| < r\}.$$

c) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Muestre la equivalencia de los siguientes dos enunciados:

- 1) A es abierto;
- 2) cualquiera sea $y \in A$, existe $r > 0$ tal que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \max |x_i - y_i| < r\} \subseteq A.$$

2. a) Muestre que los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son abiertos

- 1) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 7\}$;
- 2) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y > 1\}$;
- 3) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \vee y \neq 0\}$.

b) Dé un ejemplo de un conjunto en $\mathbb{R}^3$ que no sea ni abierto ni cerrado.

3. Para cada uno de los siguientes conjuntos $A \subset \mathbb{R}^3$, calcule ∂A , $\bar{A}$, $\bar{A} \setminus A$ y $A \setminus \partial A$:

- a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$;
- b) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \wedge z < 2\}$;
- c) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \wedge x^2 + y^2 + (z + 1)^2 < 1\}$;
- d) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \wedge x^2 + y^2 < 1/2\}$.

4. Determine cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son cerrados y acotados:

- a) $K_1 = B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$;
- b) $K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
- c) $K_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$;
- d) $K_4 = \{(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$;
- e) $K_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge y = 0\}$.

5. En cada uno de los siguientes casos, encuentre una sucesión de puntos de A que no posea ninguna subsucesión convergente a un punto de A :

- a) $A = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$;

- b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$.
6. Dé el dominio de definición para cada una de las siguientes funciones y grafíquelo:
- (a) $f(x, y) = \ln(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4)$ (b) $f(x, y) = \sqrt{6 - (2x + 3y)}$
- (c) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \sqrt{y - x^2}$ (d) $f(x, y) = \frac{1}{x}$
- (e) $f(x, y) = \frac{\ln(1 - y + x^2)}{\sin x}$ (f) $f(x, y) = \int_x^y \frac{1}{1 + t^2} dt$
- (g) $f(x, y) = \frac{\cos x}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}}$ (h) $f(x, y) = \frac{\sin x^2 y}{\ln(1 - x^2)}$
7. Encuentre las curvas de nivel de las siguientes funciones:
- (a) $f(x, y) = x + y$ (b) $f(x, y) = x^2 + y^2$
- (c) $f(x, y) = \sqrt{xy}$ (d) $f(x, y) = \frac{y}{x^2}$
- (e) $f(x, y) = x^2 - y^2$
8. Estudie las superficies de $\mathbb{R}^3$ representadas por las siguientes ecuaciones y diga cuáles de estas superficies son la gráfica de una función $z = f(x, y)$.
- (a) $z = 2x^2 + y^2$ (b) $z^2 = 1 - x^2 - \frac{y^2}{2}$
- (c) $z = \frac{1}{x^2 + y^2}$ (d) $3x + 2y - z = 0$
- (e) $z = x^2 y^2 + 1$ (f) $z^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} - 2$
- (g) $6x^2 + y^2 - z^2 = 1$ (h) $z = \frac{y}{\sqrt{x}}, \text{ con } x > 0$
9. Encuentre las superficies de nivel de las siguientes funciones:
- (a) $u = x + y + z$ (b) $u = x^2 + y^2 - z^2$
- (c) $u = x^2 + y^2 + z^2$ (d) $u = x^2 + 2y^2$
10. a) Usando sólo la definición de límite demuestre que:
- (a) $\lim_{(x, y) \rightarrow (1, 0)} x + y = 1$ (b) $\lim_{(x, y) \rightarrow (-1, 8)} xy = -8$

b) Si $\epsilon = 1$, $\epsilon = 1/100$ ó $\epsilon = \alpha^2$, encuentre $\delta > 0$ tal que

$$\|(x, y) - (-1, 8)\| < \delta \implies |xy + 8| < \epsilon.$$

11. Pruebe que:

$$(a) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (7,2)} x^2 + y^2 - xy = 39$$

$$(b) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} xe^{xy} = 0$$

$$(c) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} ye^x = 1$$

$$(d) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \sin(x \cos y) = 0$$

$$(e) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (c,0)} \frac{\sin x^2 y}{x^2 - y^2} = 0 \text{ si } c \neq 0$$

$$(f) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \frac{y^2 + \cos(\pi - x)}{y} = \frac{8}{3}$$

12. a) Sea $f : B_r(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0$. Pruebe que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{\sin f(x, y)}{f(x, y)} = 1.$$

b) Sea $f : B_r(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = +\infty$. Pruebe que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{\ln f(x, y)}{f(x, y)} = 0.$$

c) Calcule:

$$1) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2};$$

$$2) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin xy}{x};$$

$$3) \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2).$$

13. Analice la existencia de los límites restringido a los ejes coordenados y del límite doble de las siguientes funciones en el origen:

$$(a) \quad f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$$

$$(b) \quad f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$$(c) \quad f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$(d) \quad f(x, y) = \frac{\sin x}{y}$$

$$(e) \quad f(x, y) = |x|^y$$

$$(f) \quad f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{xy + y - x}$$

$$(g) \quad f(x, y) = \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$$

$$(h) \quad f(x, y) = (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$$

$$(i) \quad f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - x^2 + 1}{x^2 - y^2}$$

$$(j) \quad f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

$$(k) \quad f(x, y) = \frac{xy}{|x| + |y|} \qquad (l) \quad f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$$

$$(m) \quad f(x, y) = x \sin \frac{\pi}{y} + y \sin \frac{\pi}{x} \qquad (n) \quad f(x, y) = \sin \frac{x}{y}$$

$$(o) \quad f(x, y) = \frac{e^{x(y+1)} - x - 1}{|x - y|}$$

14. Demuestre que las siguientes funciones tienden a cero si (x, y) se aproxima al origen a lo largo de cualquier recta, pero que para ninguna de ellas existe el límite cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

$$(a) \quad f(x, y) = \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3} \qquad (b) \quad f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2 - x} \qquad (c) \quad f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

15. Estudie la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados

$$a) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0); \end{cases} \quad \text{en } (1, 0) \text{ y } (0, 0);$$

$$b) \quad f(x, y) = \begin{cases} |y|^x(1+x)^y, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ y } x > -1; \\ 1, & \text{si } (x, y) = (0, 0); \end{cases} \quad \text{en } (1, 0) \text{ y } (0, 2);$$

$$c) \quad f(x, y) = \sin(x \cos y) \text{ en } (1, 1) \text{ y } (0, 2);$$

$$d) \quad f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{si } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0; \\ 1, & \text{en otro caso;} \end{cases} \quad \text{en } (0, 0) \text{ y } (1, 1);$$

$$e) \quad f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } xy \neq 0; \\ 0, & \text{si } xy = 0; \end{cases} \quad \text{en } (1, 0) \text{ y } (-1, 2).$$

16. Consideremos la función $f(x, y) = x \cdot y \cdot \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$.

a) Calcular su dominio natural.

b) Determinar si es posible extenderla a $\mathbb{R}^2$ de modo que resulte continua.

17. Encuentre los puntos de discontinuidad de las siguientes funciones:

$$(a) \quad f(x, y) = \ln(x^2 + y^2) \qquad (b) \quad f(x, y) = \frac{1}{1 - x^2 - y^2}$$

$$(c) \quad f(x, y) = |y| \qquad (d) \quad f(x, y) = \frac{\sin xy}{x - y}$$

$$(e) \quad f(x, y) = \frac{xy + 1}{x^2 - y} \qquad (f) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

18. Demuestre que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

es continua respecto de cada una de las variables por separado pero no lo es como función de ambas.

19. Estudie la continuidad de las siguientes funciones:

- a) $f(x, y) = (x^2, e^x)$;
- b) $f(x, y) = \left(\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, \frac{e^{x^2+y^2}-1}{x^2+y^2} \right)$.

20. Sea $f : \{(x, y) : x \neq 0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\sin x e^y}{2x}.$$

Si $b \in \mathbb{R}$, calcule $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,b)} f(x, y)$.

21. a) Sea $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \frac{1}{1-\|(x,y)\|}$. Muestre que f es continua y no es acotada.
- b) Sea $g : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x, y) = \|(x, y)\|$. Pruebe que g es continua y acotada pero no alcanza su máximo en $B_1(0)$.

22. Sea $f(x, y) = \frac{\sin(x^2 y)}{\ln(1-x^2)}$

- a) Encuentre el dominio D de f y gráfiquelo.
- b) Dado $q = (q_1, q_2) \in Fr(D)$. ¿Existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (q_1, q_2)} f(x, y)$?

23. Definimos $F : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(x_1, x_2, \dots, x_9) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}.$$

- a) Sea $a \in \mathbb{R}^9$. Muestre que si $F(a) \neq 0$, entonces hay un entorno U de a tal que si $x \in U$ entonces $F(x) \neq 0$.

- b) Concluya que si $a \in \mathbb{R}^9$ es tal que la matriz $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$ es inversible, entonces existe un entorno U de a tal que si $x \in U$, la matriz $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$ también lo es.