# Análisis I - Práctica 5
# (Primera parte)

Primer Cuatrimestre de 2007.

### Diferenciación

1. Sea $f$ una función que verifica $0 \leq f(x) \leq x^2$ para $x$ en un intervalo abierto alrededor del origen. Probar que existe $f'(0)$ y calcular la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f$ en el punto $(0, f(0))$.

2. Sea $f$ una función derivable en $x = a$. Probar que
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x-a)}{x-a} = 0.$$

3. Supongamos que $f$ es una función continua en $x = a$ y que satisface
$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \alpha - \beta(x-a)}{x-a} = 0.$$
Probar que $f$ es derivable en $x = a$ y que $y = \alpha + \beta(x-a)$ es la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f$ en $(a, f(a))$.

4. Consideremos la función $f(x) = x^2$ y la recta de ecuación $y = 9 + 4(x-3)$. Probar que $\lim_{x \to 3} f(x) - (9 + 4(x-3)) = 0$ pero que
$$\lim_{x \to 3} \frac{f(x) - (9 + 4(x-3))}{x-3} \neq 0.$$
Meditar sobre la frase "la recta tangente es la mejor aproximación lineal".

5. Para cada una de las siguientes funciones $f$ y $g$, calcular la derivada en $t = 0$ de la función compuesta $f \circ g$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(a)$ $f(x,y) = x^2 + y^2$ | $g(t) = t(1,0) + (1,2)$ | , | $g(t) = t(0,1) + (1,2)$ |
| $(b)$ $f(x,y) = 2xy - 3x^2 + y - 5$ | $g(t) = t(1,1) + (2,3)$ | , | $g(t) = t(1,2) + (0,1)$ |
| $(c)$ $f(x,y,z) = e^z(xy + z^2)$ | $g(t) = t(0,1,0) + (1,1,2)$ | | |
| $(d)$ $f(x,y) = (x+1)\operatorname{sen} y - 2$ | $g(t) = t(1,0) + (x_0, y_0)$ | , | $g(t) = t(0,1) + (x_0, y_0)$ |
| $(e)$ $f(x,y) = \|\|(x,y)\|\|$ | $g(t) = t(a,b)$ | | |

6. 
   *a*) Sea $f(x,y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)$ y $\frac{\partial f}{\partial v}(2,1)$ con $v = (1,1)$.

   *b*) $\frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1)$ para $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + z^2} + \ln(y)$

   *c*) Sea $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial v}(0,0)$ para $v = (a,b)$.

7. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

   *a*) $f(x,y) = x^4 + 2xy + y^3x - 1$

   *b*) $f(x,y,z) = ye^x + z$

c) $f(x,y) = x^2\sin^2(y)$

d) $f(x,y) = \sin x$

e) $f(x,y,z) = z(\cos(xy) + \ln(x^2+y^2+1))$

f) $f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$

g) $f(x,y) = \arctan\frac{y}{x}$

8. Consideremos la siguiente función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

   Probar que las únicas direcciones $v \in \mathbb{R}^2$ para las que existe la derivada direccional $f_v$ en el origen son $v = (1,0)$ y $v = (0,1)$. Probar, además, que la función no es continua en el origen.

9. Consideremos la siguiente función $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

   Probar que $f$ admite derivadas direccionales en el origen para todo $v \in \mathbb{R}^2$. Sin embargo, $f$ tampoco es continua en el origen.

10. Probar que si $v \in \mathbb{R}^2$ entonces $\dfrac{\partial f}{\partial(\alpha v)}$ es igual a $\alpha\dfrac{\partial f}{\partial v}$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.

11. Graficar las siguientes curvas $\sigma : I \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

    a) $\sigma : [-1,2] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (1,1,t)$.

    b) $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = t(1,1,0) + (1-t)(1,0,5)$.

    c) $\sigma : [-1,2] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (1,1,t^2)$.

    d) $\sigma : [-3,3] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (1,t^2,t)$.

    e) $\sigma : [0,4\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$.

12. Graficar las siguientes curvas $\sigma : I \to \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (x(t), y(t))$.

    a) $\sigma : [0,4\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (t - \operatorname{sen}(t), 1 - \cos(t))$.

    b) $\sigma : [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (\cos(2t), \operatorname{sen}(2t))$.

13. Calcular la derivada de $\sigma$ en $t = t_0$. Encontrar la ecuación de las rectas tangentes a la curva imagen de $\sigma$ en $\sigma(t_0)$.

    a) $\sigma(t) = (6t, 3t^2, t^3), \quad t_0 = 0$

    b) $\sigma(t) = (\cos^2(t), 3t - t^3, t), \quad t_0 = 0$

    c) $\sigma(t) = (\operatorname{sen}(3t), \cos(3t), 2t), \quad t_0 = 1$

14. Encontrar curvas $\sigma$ que representen los siguientes conjuntos o trayectorias.

    a) $\{(x,y)/y = e^x\}$

    b) $\{(x,y)/4x^2 + y^2 = 1\}$

    c) $\{(x,y,z)/x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1,\ z = x^2 + y^2,\ z \neq 0\}$

15. Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$ y las siguientes rectas de $\mathbb{R}^2$ definidas por

$$g_1(t) = t(1,0) + (2,3), \qquad g_2(t) = t(0,1) + (2,3), \qquad g_3(t) = t(1,1) + (2,3).$$

*a*) Considerar la restricción de $f$ a la imagen de $g_i$. Mostrar que el gráfico de esta restricción es una curva de $\mathbb{R}^3$. Dar una parametrización $\sigma_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $\sigma_i(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de dicha curva.

*b*) Probar que $\sigma_i(0) = (2, 3, f(2, 3))$. Calcular el vector tangente a $\sigma(t)$ en $t = 0$.

*c*) Probar que $\mathbb{L} : t(v_1, v_2, f_v(0)) + \sigma(0)$ es la ecuación paramétrica de la recta tangente a la curva $\sigma$ en $t = 0$.

16. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ y $\mathbb{L} : t(a, b) + (x_0, y_0)$. Probar que la ecuación paramétrica de la recta tangente a la curva

$$\sigma(t) = (ta + x_0, tb + y_0, f(ta + x_0, tb + y_0))$$

en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0)))$ viene dada por

$$\mathbb{L} : t(a, b, f_v(x_0, y_0)) + (x_0, y_0, f(x_0, y_0)).$$

17. Sea $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$

*a*) Encontrar ecuaciones paramétricas de las rectas tangentes a las siguientes curvas en $t_0 = 0$:

$$\sigma_1(t) = (t + 1, 3, f(t + 1, 3)) \quad \text{y} \quad \sigma_2(t) = (t + 1, t + 3, f(t + 1, t + 3)).$$

*b*) Encontrar la ecuación de un plano $z = T(x, y)$ que contenga ambas rectas y mostrar que

$$\lim_{(x,y)\to(1,3)} \frac{f(x, y) - z}{||(x, y) - (1, 3)||} = 0.$$

18. Sea $f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|y}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Probar que en el origen $f$ es continua, admite todas las derivadas direccionales, pero que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x, y) - (\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y + f(0, 0))}{||(x, y)||} \neq 0.$$

19. Sea $f$ diferenciable en $(1, 2)$ tal que $f(1, 2) = 3$. Se sabe que $f_{v_1}(1, 2) = 3$, $f_{v_2}(1, 2) = 4$ con $v_1 = (1, 1)$ y $v_2 = (1, 3)$.

*a*) Encontrar la ecuación del plano tangente al gráfico de $f$ en $(1, 2, f(1, 2))$.

*b*) Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$.

20. Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de las siguientes funciones en el origen:

*a*) $f(x, y, z) = \sqrt{|xyz|}$

*b*) $f(x, y) = \begin{cases} x \sin\left(4 \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

*c*) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

*d*) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x}{y}\sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si} \quad y \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad y = 0 \end{cases}$

21. Estudiar la existencia de plano tangente a las siguientes funciones en los puntos indicados. Si existe, escribir la ecuación.

    a) $f(x,y) = xy + 1 - \sin\left(\frac{x^2}{2}\right)$ en $(1,5)$ y en $(2,2)$.

    b) $f(x,y) = x^{1/4}y^{1/4}$ en $(0,0)$ y en $(16,1)$.

    c) $f(x,y) = \frac{x}{y}$ en $(x_0,y_0)$ con $y_0 \neq 0$.

    d) $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ en $(0,0)$ y en $(1,0)$.

    e) $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$ en $(0,0)$ y en $(-1,1)$.