# Análisis I - Práctica 5
# (Segunda parte)

Primer Cuatrimestre de 2007.

### Diferenciación

1. Calcular el valor aproximado de $\left(0,99e^{0,2}\right)^8$.

2. a) Sea $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T(x,y)=(x+y,x-y,2x+3y)$$

   1) Verificar que $T$ es una transformación lineal y calcular su matriz asociada (en las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$).
   2) Calcular la matriz de la diferencial $DT(a)$ para $a\in\mathbb{R}^2$.
   3) Verificar que estas dos matrices son iguales.

   b) A continuación consideremos una transformación lineal $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$.

   1) Supongamos que $T$ verifica
$$\lim_{v\to\overrightarrow{0}}\frac{||Tv||}{||v||}=0,$$
donde $\overrightarrow{0}$ denota el vector nulo de $\mathbb{R}^m$. Probar entonces que $T$ es la transformación lineal nula, es decir, para cada $w\in\mathbb{R}^n$ tenemos que $T(w)=\overrightarrow{0}$.
Sugerencia: considerar direcciones $v=tw$ con $t\in\mathbb{R}$.
   2) Asumiendo que $T$ es diferenciable, deducir (en dos formas diferentes) que para cada $a\in\mathbb{R}^n$ la diferencial $DT(a)$ es igual a $T$. (Una de las formas es deducirlo del ítem anterior; otra, de un resultado de la teórica.)

3. Para cada una de las siguientes funciones calcular $DF(a)$ para $a$ en el dominio de $F$.

   a) $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $F(x,y)=(x,y)$
   b) $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$, $F(x,y)=(xe^y+\cos y,x,x+e^y)$
   c) $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$, $F(x,y,z)=(x+e^z+y,yx^2)$
   d) $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $F(x)=||x||^2$

4. Calcular el gradiente de $f$ para

   a) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}+z^2$
   b) $f(x,y,z)=xy+xz+yz$
   c) $f(x,y,z)=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}$

5. Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ una función diferenciable en $a\in\mathbb{R}^n$. Probar que para cada vector $v\in\mathbb{R}^n$ existe la derivada direccional $f_v(a)$ y que $f_v(a)$ es igual a $\nabla f(a)\cdot v$, donde $\cdot$ denota el producto escalar entre vectores de $\mathbb{R}^n$.

6. Sean $f(u,v,w) = u^2 + v^3 + wu$ y $g(x,y) = x \sin y$. Además, tenemos la siguiente dependencia respecto de $t$,

$$u(t) = t^2 + 1, v(t) = \sin t, w(t) = t - 1 \text{ y } x(t) = \sin t, y(t) = t,$$

donde $t$ es una nueva variable. Bajo estas condiciones, calcular las derivadas respecto de $t$ de las funciones

$$f\left(u(t), v(t), w(t)\right) \text{ y } g\left(x(t), y(t)\right),$$

en dos formas diferentes:

   *a*) usando la regla de la cadena
   *b*) sustituyendo

7. Sean $f(u,v) = e^{uv}\sin(u^2+v^2), g(u,v,w) = \ln(u^2+v^2+w^2+1)$. Dadas

$$u(x,y) = x + y, v(x,y) = xy, w(x,y) = x - y + 1$$

calcular las derivadas parciales de las funciones

$$f\left(u(x,y), v(x,y)\right) \text{ y } g\left(u(x,y), v(x,y), w(x,y)\right)$$

   *a*) usando la regla de la cadena
   *b*) sustituyendo

8. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

   *a*) $f(x,y) = \int_0^{2y} x^2z + z^3 dz$
   *b*) $f(x,y) = \int_{\sqrt{x}}^{x} \sin(xyz)dz$
   *c*) $f(x,y,z) = \int_5^{x+2y} \sin(x^2+yz+t)dt$

9. a) ¿Para qué valores de $p \in \mathbb{R}_{>0}$ es

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^p \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   diferenciable en $\mathbb{R}^2$?¿Para qué valores de $p$ es $f$ de clase $C^1$?

   b) La función $f$ se puede escribir como $g(x^2+y^2)$ con $g(t) = t^p \text{sen}\,\frac{1}{t}$ si $t > 0$ y $g(0) = 0$. ¿Qué conclusiones se obtienen si se estudia la diferencibilidad de $g$?

10. Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables y $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

   *a*) $F(x,y) = G\left(f(x)g(y), f(x)h(y)\right)$
   *b*) $F(x,y) = G(x^y, y^x) \quad (x, y > 0)$
   *c*) $F(x,y) = G(x, G(x,y))$
   *d*) $F(x,y) = f(x)^{g(y)} \quad$ (si $f(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$)
   *e*) $F(x,y) = G\left(\int_x^{f(y)} h(t)dt, g(y)\right)$

11. Como una consecuencia del Teorema de Lagrange mostrar que son válidas las siguientes acotaciones

*a*) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x - y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

*b*) $|1/x - 1/y| \leq |x - y|$, para $x, y > 1$.

*c*) $|\arctan a - \arctan b| \leq \dfrac{1}{2}\,|a - b|$, para $a, b \geq 1$.

Para cada una de las funciones involucradas en las acotaciones anteriores encontrar la dependencia explícita de $\delta$ (respecto de $\epsilon$ y $x_0$) al estudiar la continuidad de la función en $x_0$.

12. En este ejercicio vamos a dar una demostración del siguiente resultado:

**Teorema del Valor Medio**: *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida sobre el abierto $U$. Sean $P_1$ y $P_2$ dos puntos cualesquiera de $U$ tales que el segmento $P_1P_2$ (que une $P_1$ con $P_2$) está contenido en $U$. Entonces existe un punto $P$ en el segmento $P_1P_2$ tal que*

$$f(P_1) - f(P_2) = \nabla f(P) \cdot (P_1 - P_2),$$

*donde $\cdot$ denota el producto escalar de vectores.*

Notemos que este resultado es una generalización del Teorema de Lagrange al caso multidimensional.

*a*) Encontrar una parametrización $\sigma(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de la recta que une $P_1$ y $P_2$ tal que $\sigma(0) = P_1$ y $\sigma(1) = P_2$.

*b*) Probar que existe $c$ en el intervalo $(0, 1)$ tal que $(f \circ \sigma)(1) - (f \circ \sigma)(0) = (f \circ \sigma)'(c)$.

*c*) Deducir el Teorema del Valor Medio.

13. *a*) Sea $f : B \to \mathbb{R}$, donde $B$ es una bola en $\mathbb{R}^2$.

1) Probar que si $f$ es constante en $B$, entonces $\nabla f(a, b) = 0$, cualquiera sea $(a, b) \in B$.

2) Probar que si $\nabla f(a, b) = 0$ para cada $(a, b) \in B$, entonces $f$ es constante en $B$. (*Sugerencia:* utilizar el Teorema de Valor Medio.)

*b*) Si $f, g : B \to \mathbb{R}$ son diferenciables, y verifican que $\nabla f(a, b) = \nabla g(a, b)$ para todo $(a, b) \in B$, probar que entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x, y) = g(x, y) + c.$$

14. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la esfera de radio 1 centrada en el origen; es decir, $S$ es la superficie de $\mathbb{R}^3$ definida por $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$. Mostrar que el vector $v = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es normal a la superficie $S$ en el punto $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e interpretar este hecho geométricamente.

15. Consideremos la superficie $S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\right\}$. Probar que las rectas $\mathbb{L}_1 : t(0, 1, 1) + (1, 0, 0)$ y $\mathbb{L}_2 : t(0, 1, -1) + (1, 0, 0)$ son ortogonales y están contenidas en $S$. Encontrar la ecuación del plano tangente a $S$ en $(1, 0, 0)$.

16. Calcular la ecuación del plano tangente y de la recta normal, cuando existan, a las superficies dadas en los puntos indicados

*a*) $x^{10}y - \cos(z)x + 7 = 0 \qquad x_0 = (7, 0, 0)$

*b*) $xy - z\ln(y) + e^{xy} = 1 \qquad x_0 = (0, 1, 1)$

*c*) $xy\sin(y) + ze^{xy} - z^2 = 0 \qquad x_0 = (4, 0, 1)$

*d*) $\cos(x)\cos(y)e^z = 0 \qquad x_0 = (\pi/2, 1, 0)$

17. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $(x_0, y_0)$ y sea $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función definida por $h(x, y, z) = f(x, y) - z$. ¿Qué relación existe entre el plano tangente al gráfico de $f$ en $(x_0, y_0)$ y el plano tangente a una superficie de nivel de $h$ en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

18. Encontrar los planos tangentes a la superficie

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21\}$$

que sean paralelos al plano $\Pi : x + 4y + 6z = 8$.

19. Encuentre la dirección en que la función $z = x^2+xy$ crece más rápidamente en el punto $(1, 1)$. ¿Cuál es la magnitud $||\nabla z||$ en esta dirección? Interpretar geométricamente esta magnitud.

20. Supongamos que la función $h(x, y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ representa la altura de una montaña en la posición $(x, y)$. Estamos parados en un punto del espacio cuyas coordenadas respecto del plano $xy$ son iguales a $(1, 0)$ ¿En qué dirección deberíamos caminar para escalar más rápido?

21. *a*) Mostrar que si $\nabla f(x_0) \neq 0$ entonces $-\nabla f(x_0)$ apunta en la dirección a lo largo de la cual $f$ decrece más rápidamente.

    *b*) Una distribución de temperaturas en el plano está dada por la función $f(x, y) = 10 + 6\cos(x)\cos(y)+4\cos(3y)$. En el punto $(\pi/3, \pi/3)$ encontrar las direcciones de más rápido crecimiento y más rápido decrecimiento.

22. Aquí solía aparecer el celebérrimo Capitán Ralph. Lamentablemente, el calor de Mercurio lo abrasó.

23. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = x^5 + x^3 + x$. Probar que $f$ es biyectiva y que la inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable. Encontrar la ecuación de la recta tangente al gráfico de $f^{-1}$ en el punto $(3, f^{-1}(3))$. ¿Cuánto vale $(f^{-1})'(a)$ para cada $a \in \mathbb{R}$?

24. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal $T(x, y) = (3x - 2y, 5x - 2y)$. Mostrar que $T$ es un isomorfismo, encontrar la expresión de la inversa $T^{-1}$ y calcular $DT^{-1}(a)$ para cada $a \in \mathbb{R}^2$.

25. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Probar que para cada $a \in \mathbb{R}^2$ el determinante de la diferencial $|DF(a)|$ es distinto de cero aunque $F$ no es inyectiva.

26. Determinar si las siguientes aplicaciones son localmente inversibles de clase $C^1$ en $a$ y calcular la diferencial de $F^{-1}$ en el punto $F(a)$.

    *a*) $F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ en $a = (x, y) \neq (0, 0)$

    *b*) $F(x, y) = (\sin x, \cos(xy))$ en $a = (\pi, \pi/2)$

27. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x, y) = (x^3y + 3x^2y^2 - 7x - 4y, xy + y)$.

    *a*) Demostrar que existe un entorno $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $(1, 1) \in U$, un entorno $V \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $(-7, 2) \in V$ y una inversa para $F$, $F^{-1} : V \to U$, $C^1$ tal que $F^{-1}(-7, 2) = (1, 1)$.

    *b*) Sean $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función $C^1$ tal que $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = 2$, $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 1) = 5$ y $v = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Calcular $\frac{\partial(goF^{-1})}{\partial v}(-7, 2)$.

28. Sea $f(x, y, z) = x^3 - 2y^2 + z^2$. Demostrar que $f(x, y, z) = 0$ define una función implícita $x = \varphi(y, z)$ en el punto $(1, 1, 1)$. Encontrar $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 1)$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1, 1)$.

29. Encontrar la solución $y = f(x, z)$ de $x^2 + y^2 - z^3 = 0$ en un entorno de los siguientes puntos del plano $xz$ y escribir explícitamente esos entornos.

    *a*) $(5, 10)$

   b) $(0,64)$

30. Determinar las derivadas parciales de las funciones que quedan definidas implícitamente en un entorno del punto dado mediante las relaciones

    a) $f(x,y)=\frac{1}{4}x^2-y^2=1 \quad a=(2,0)$
    b) $g(x,y)=x^5+y^y+xy=3 \quad a=(1,1)$
    c) $h(x,y,z)=x^3+2y^3+z^3-3xyz-2y-8=0 \quad a=(0,0,2)$

31. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} \frac{2}{3}x & + & 3y & - & 7z & = & 0 \\ -x & - & 2y & + & \frac{21}{2}z & = & 0 \end{array}\right.$$

    a) Teniendo en cuenta que el sistema tiene dos ecuaciones linealmente independientes en tres incógnitas, del Teorema de la dimensión deducimos que podemos despejar dos incógnitas en función de una sola variable libre. Resolver entonces el sistema de ecuaciones despejando $x$ y $z$ en función de $y$.
    b) ¿Alguna dificultad en el ítem anterior?
    c) ¿Cuáles son los menores no nulos de la matriz? ¿Cuáles son entonces los posibles despejes?

32. El paraboloide $3x^2+2y^2-2z=1$ y la superficie esférica $x^2+y^2+z^2-4y-2z+2=0$ se cortan en el punto $(1,1,2)$:

    a) Hallar el plano tangente en dicho punto, probar que ambos planos se cortan ortogonalmente y encontrar la recta de intersección de los dos planos tangentes.
    b) Usando el teorema de la función implícita, probar que en dicho punto, las dos superficies se cortan ortogonalmente y que la recta tangente a la curva de intersección de las dos superficies en dicho punto es la intersección de los dos planos tangentes.

33. Probar que existe una curva que es intersección de las superficies $z=4x^2-3y^2$, $x^2+y^2+z^2=24$ en el punto $P=(2,-2,4)$. Hallar la recta tangente de dicha curva en el punto $P$.