Análisis I - Práctica 7

Primer Cuatrimestre de 2007.

Integrales múltiples

Integrales dobles

1. Evaluar cada una de las integrales siguientes si $R = [0,1] \times [0,1]$:

   (a) $\displaystyle\int_R (x^3 + y^2)\, dxdy$ (b) $\displaystyle\int_R ye^{xy}\, dxdy$

   (c) $\displaystyle\int_R (xy)^2 \cos x^3\, dxdy$ (d) $\displaystyle\int_R \ln[(x+1)(y+1)]\, dxdy$

   (e) $\displaystyle\int_R (x^m y^n)\, dxdy,$ donde $m, n > 0$ (f) $\displaystyle\int_R (ax + by + c)\, dxdy$

   (g) $\displaystyle\int_R \sin(x+y)\, dxdy$ (h) $\displaystyle\int_R (x^2 + 2xy + yx^{1/2})\, dxdy$

2. Calcular el volumen del sólido acotado por el plano xz, el plano yz, el plano xy, los planos $x = 1$ y $y = 1$, y la superficie $z = x^2 + y^4$.

3. Sean f y g dos funciones continuas en $[a,b]$ y $[c,d]$, respectivamente. Mostrar que si consideramos el rectángulo $R = [a,b] \times [c,d]$ entonces

$$\int_R [f(x)g(y)]\, dxdy = \int_a^b f(x)\, dx \int_c^d g(y)\, dy.$$

4. Calcular el volumen del sólido acotado por la superficie $z = \sin y$, los planos $x = 1,\ x = 0,$ $y = 0,\ y = \pi/2$ y el plano xy.

5. Calcular el volumen del sólido acotado por la gráfica $z = x^2 + y$, el rectángulo $R = [0,1] \times [0,2]$ y los "lados verticales" de R.

6. Sea $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \text{ es racional} \\ 2y, & \text{si } x \text{ no es racional} \end{cases}$$

   Mostrar que la integral iterada $\displaystyle\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\, dy\right] dx$ existe pero f no es integrable. ¿Existe la otra integral iterada?

7. Sean $F \in \mathcal{C}^2$ y $f(x,y) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x,y)$. Calcular $\displaystyle\int_a^b \int_c^d f(x,y)\, dxdy$ en términos de F.

8. Graficar las regiones determinadas por los límites de integración de las siguientes integrales y calcular las integrales iteradas.

(a) $\int_0^1 \int_0^{x^2} dydx$

(b) $\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dydx$

(c) $\int_0^1 \int_1^{e^x} (x+y)\, dydx$

(d) $\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y\, dydx$

(e) $\int_{-3}^2 \int_0^{y^2} (x^2+y)\, dxdy$

(f) $\int_{-1}^1 \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y}\, dydx$

(g) $\int_0^1 \int_0^{(1-x^2)^{1/2}} dydx$

(h) $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} y \sin x\, dydx$

(i) $\int_0^1 \int_{y^2}^{y} (x^n+y^m)\, dxdy \qquad (m,n>0)$

(j) $\int_{-1}^0 \int_0^{2(1-x^2)^{1/2}} x\, dydx$

(k) $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin y} y\, dxdy$

(l) $\int_{-2}^0 \int_{x^3}^{x+1} (y^2+1)\, dydx$

9. Usar integrales dobles para calcular el área de un círculo de radio r y el área de una elipse con semiejes de longitud a y b.

10. Calcular

$$\int_T (x \sin x + y \sin(x+y))\, dxdy$$

siendo T el triángulo de vértices $(1,0)$, $(0,1)$ y $(3,3)$.

11. Sea D la región acotada por los semiejes positivos de x e y y la recta $3x+4y=10$. Calcular

$$\int_D (x^2+y^2)\, dxdy$$

12. Sea D la región acotada por el eje y y la parábola $x=-4y^2+3$. Calcular

$$\int_D x^3 y\, dxdy$$

13. Calcular el volumen de un cono de base de radio r y altura h.

14. Calcular el volumen de las siguientes regiones:

a) R: encerrada por la superficie $z=x^2+y^2$ y el plano $z=10$.

b) R: encerrada por el cono de altura 4 dado por $z^2=x^2+y^2$.

c) R: encerrada por las superficies $x^2+y^2=z$ y $x^2+y^2+z^2=2$.

d) R: elipsoide con semiejes a,b y c.

e) R: determinada por $x^2+y^2+z^2 \leq 10$ y $z \geq 2$.

15. En las integrales siguientes, cambiar el orden de integración, graficar las regiones correspondientes y evaluar la integral por los dos caminos.

(a) $\displaystyle\int_0^1\int_x^1 xy\,dydx$ (b) $\displaystyle\int_0^1\int_1^{2-y}(x+y)^2\,dxdy$

(c) $\displaystyle\int_0^1\int_{2x}^{3x} x^2y\,dydx$ (d) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_{|y|}^1(x+y)^2\,dxdy$

(e) $\displaystyle\int_{-3}^3\int_{-(9-y^2)^{1/2}}^{(9-y^2)^{1/2}} x^2\,dxdy$

16. Calcular $\displaystyle\int_D y^2x^{1/2}\,dxdy$ donde

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>0, y>x^2, y<10-x^2\}$$

17. Calcular $\displaystyle\int_T e^{x-y}\,dxdy$ donde T es el triángulo con vértices $(0,0)$, $(1,3)$, y $(2,2)$.

18. Teniendo en cuenta que

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(s)\,ds$$

y

$$f'(s)=f'(0)+\int_0^s f''(t)\,dt$$

se tiene

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\int_0^x\int_0^s f''(t)\,dtds$$

cambiar el orden de integración para demostrar que

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\int_0^x f''(t)(x-t)\,dt$$

Usando la misma idea demostrar la fórmula general:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\cdots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+\int_0^x f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\,dt$$

Integrales triples

19. Calcular:

a) $\displaystyle\int_C (xyz+x^2y^2z^2)\,dV$, donde $C=[0,1]\times[-3,2]\times[-1,1]$.

b) $\displaystyle\int_C (x\cos z+y\cos x+z\cos y)\,dV$, donde $C=[0,\pi]\times[0,\pi]\times[0,\pi]$.

20. Calcular el volumen de una esfera de radio r.

21. Calcular:

a) $\displaystyle\int_W x\,dV$, donde W es la región limitada por, $x=0$, $y=0$, $z=2$, $z=x^2+y^2$.

b) $\displaystyle\int_W x^2 \cos z\, dV$, donde W es la región limitada por, $z=0$, $z=\pi$, $y=0$, $x=0$, $x+y=1$.

c) $\displaystyle\int_W dV$, donde W es la región limitada por, $z = x^2+3y^2$ y $z = 9-x^2$.

d) $\displaystyle\int_W (x+y+z)\, dV$, donde $W = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \|(x,y,z)\|\leq 1\}$.

e) $\displaystyle\int_W (x^3+y+z)\, dV$, donde $W = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : z\in[0,1], x^2+y^2\leq 1\}$.

22. Calcular $\displaystyle\int_0^1\int_0^{2x}\int_{x+y}^{x^2+y^2} dzdydx$ y graficar la región de integración.

23. Cambiar el orden de integración en

$$\int_0^1\int_0^x\int_0^y f(x,y,z)\, dzdydx$$

para obtener otras cinco formas de realizar la misma integración. Graficar la región de integración.

24. Sea $B = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \|(x,y,z)\|\leq 1\}$. Demostrar que si f es una función continua en B, impar respecto de z (es decir $f(x,y,z) = -f(x,y,-z)$), entonces $\int_B f(x,y,z)\, dV = 0$. ¿Para que otras regiones vale este resultado? (dar ejemplos).

25. Sea W la región determinada por las condiciones $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 1$ y $0\leq z\leq xy$.

(a) Hallar el volumen de W

(b) Calcular $\displaystyle\int_W x\, dxdydz$

(c) Calcular $\displaystyle\int_W y\, dxdydz$

(d) Calcular $\displaystyle\int_W z\, dxdydz$

(e) Calcular $\displaystyle\int_W xy\, dxdydz$