Función Inversa y Función Implícita

Pablo Zadunaisky: pzadunaisky@gmail.com

8 de octubre de 2007

Teo (Función Implícita, versión 1). *Sea $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, y sea $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, tal que $f(x_0, y_0) = 0$. Si $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$, entonces existen entornos U de x_0, y V de y_0, y una función diferenciable $g : U \longrightarrow V$ tal que $f(x, g(x)) = 0$ para todo $x \in U$. Además, $\frac{\partial y}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial f/\partial x(x_0,y_0)}{\partial f/\partial y(x_0,y_0)}$*

Teo (Función Implícita, versión 2). *Sean $f_1, f_2 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, y sean A y B las superficies de nivel $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f_1(x, y, z) = 0\}$ $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f_2(x, y, z) = 0\}$. Sea (x_0, y_0, z_0) un punto en ambas superficies. Entonces, si la matriz*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix}$$

tiene determinante no nulo, hay un entorno U de $z_0 \in \mathbb{R}$, un entorno V de (x_0, y_0, z_0), y funciones $y(x), z(x) : U \longrightarrow V$ tales que si (x, y, z) está en la intersección de las superficies y en V, $y = y(x)$, $z = z(x)$. Además, las derivadas parciales se pueden despejar de forma implícita.

Nota: Quisiera recordarles algo que dije en clase, y que me parece que no pude mostrar... estos ejercicio en su gran mayoría se reducen a ver que las funciones que nos dan cumplen con el teorema de la función implícita, y lo único que hay que hacer es escribir el enunciado, reemplazar lo que nos dan en el enunciado, decir que vale el teorema, y sacar la conclusión. Después, todo va cuesta abajo... empecemos:

Ejercicios:

1. *Demostrar que es posible despejar y y z de*

$$xy + zy^2 = 2$$
$$y^3 + x^2 z^4 = 2$$

en función de x de manera única alrededor del punto $(x, y, z) = (1, 1, 1)$. Calcular $\frac{\partial y}{\partial x}(1)$.

Solución: Este es el típico caso en el que se aplica la segunda versión del teorema de la función implícita, ¿ven cómo? ¿cuáles serían las superficies de nivel?

Tenemos que $xy + zy^2 = 2$, es decir que nuestros puntos son los (x, y, z) que cumplen con la ecuación $xy + zy^2 - 2 = 0$. Entonces agarramos y escribimos $f_1(x, y, z) = xy + zy^2 - 2$, y tenemos que uno de los conjuntos de nivel es $\{f_1(x, y, z) = xy + zy^2 - 2 = 0\}$. Pero los puntos además cumplen otra condición: obviamente, esta condición es la dada por f : 2, y nuestro nuevo conjunto de nivel es $\{f_2(x, y, z) = y^3 + x^2 z^4 - 2 = 0\}$.

Ahora que ya tenemos las dos funciones del enunciado, veamos qué más nos dice el teorema. Nos dice que si queremos despejar y y z en función de x, basta mirar el determinante de esta matriz:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0,y_0,z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x_0,y_0,z_0) \end{pmatrix}$$

¿Quiénes son las derivadas parciales? ¿cuál es el punto (x_0, y_0, z_0)?. ¡¡El punto es obviamente el $(1,1,1)$!! Nos están diciendo que despejemos "alrededor" de ese punto. Así que calculamos la matriz

$$\left(\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial y}(1,1,1) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(1,1,1) \\ \frac{\partial f_2}{\partial y}(1,1,1) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(1,1,1) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} x + 2yz|_{(1,1,1)} & y^2|_{(1,1,1)} \\ 3y^2|_{(1,1,1)} & 4z^3x^2|_{(1,1,1)} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{array} \right).$$

Notar que esta matriz es inversible, porque su determnante es $3 \cdot 4 - 3 \cdot 1 = 9 \neq 0$, así que por el teorema de la función implícita, y y z se pueden despejar en función de x en un entorno de $(1,1,1)$. ¡Así termina esa parte del ejercicio! Lo único que nos pedían era ver que estas variables se podían despejar en función de la otra... que exactamente lo que dice el teorema de la función implícita (de ahí su nombre... las ecuaciones definen "implícitamente", sin que se puede necesariamente despejar con una fórmula cerrada, x e y como funciones de z) Notar que no hubo más que decir que la matriz era inversible...

Nos piden además que calculemos $\frac{\partial y}{\partial x}(1)$. ¿Cómo podemos hacer eso? Fácil. Nosotros sabemos ahora que en un entorno de $(1,1,1)$ vale que $y = y(x), z = z(x)$. Así que podemos reemplazar en las ecuaciones de arriba, y sigue valiendo que

$$\begin{aligned} xy(x) + z(x)y(x)^2 &= 2 \\ y(x)^3 + x^2 z(x)^4 &= 2 \end{aligned}$$

para todo x alrededor del 1 (lean con atención lo que dice el teorema... esta es la parte importante). Como alrededor del 1 valen esas ecuaciones, si derivamos y evaluamos en 1 está todo bien porque a la derivada sólo le importa lo que pasa cerca del 1. Por eso en el teorema uno se toma el trabajo de que los conjuntos V y U sean entornos de los puntos: así uno puede tomar límite, derivar, etc., y está todo bien. Derivando término a término, tenemos (escribiendo $z'(x)$ en lugar de la derivada de la función $z(x)$ respecto de x)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(xy(x) + z(x)y(x)^2) &= y(x) + xy'(x) + y(x)^2 z'(x) + 2y(x)z(x)y'(x) = 0 \\ \frac{d}{dx}(y(x)^3 + x^2 z(x)^4) &= 3y^2(x)y'(x) + 2xz(x)^4 + 4x^2 z(x)^3 z'(x) = 0 \end{aligned}$$

Las derivadas son iguales a cero porque está igualado todo a una constante (y eso vale *en un entorno de x=1*), y la derivada de una constante es 0. Ahora hacemos lo obvio... ¡Evaluamos en $x = 1$!. Recordemos que en $x = 1, z(x) = 1, y(x) = 1$, porque el $(1,1,1)$ es el punto desde el que empezamos todo, así que las funciones $z(x)$ e $y(x)$ en el 1 tiene que tomar *ese* valor. Evaluando en 1, tenemos que

$$\begin{aligned} y(1) + 1y'(1) + y(1)^2 z'(1) + 2y(1)z(1)y'(1) &= 1 + y'(1) + z'(1) + 2y'(1) = 0 \\ 3y^2(1)y'(1) + 2z(1)^4 + 4z(1)^3 z'(1) &= 3y'(1) + 2 + 4z'(1) = 0 \end{aligned}$$

.

De acá sale el siguiente sistema de ecuaciones:

$$3y'(1) + z'(1) = -1$$
$$3y'(1) + 4z'(1) = -2$$

(¿les resultan conocidos los coeficientes que están multiplicando a las derivadas?). De este sistema se despeja fácilmente los valores de $y'(1)$, $z'(1)$, que son $-\frac{2}{9}$ y $-\frac{1}{3}$ respectivamente.

2. *Sea (x_0, y_0, z_0) un punto del lugar geométrico definido por $z^2 + xy - a = 0$, $z^2 + x^2 - y^2 - b = 0$, donde a y b son constantes*

   - *¿Bajo qué condiciones se puede representar los puntos próximos a (x_0, y_0, z_0) de la forma $(f(z), g(z), z)$?*
   - *Calcular $f'(z)$ y $g'(z)$.*

Solución: Una vez más, la idea es aplicar ciegamente el teorema de la función implícita, versión 2. Fíjense que igual que en el primer ejercicio, podemos decir que $f_1(x, y, z) = z^2 + xy - a$, y que $f_2(x, y, z) = z^2 + x^2 - y^2 - b$. Entonces tenemos las dos superficies de nivel, y tratamos de ver cómo es la intersección de ambas. Más específicamente, queremos despejar x e y en función de z (si eso no les queda claro, lean bien el enunciado). Entonces uno simplemente vuelve a la carga, y mira ese famoso determinante. Noten que no nos están pidiendo que lo veamos en un punto en particular, sino que digamos para qué puntos la cuenta se puede hacer: tenemos que plantear la cuenta en un punto genérico y probar...

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 & x_0 \\ 2x_0 & -2y_0 \end{pmatrix}.$$

No hay más que tomar el detertminante de esta matriz, y si hacen la cuenta, el resultado es $-2(x_0^2 + y_0^2)$. Como les enseñamos desde que eran así de chiquitos, $x_0^2 + y_0^2$ se hace cero si y sólo si tanto x como y son 0 (fíjense que -2 nunca se hace cero...). Así que si no estamos en el punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$, siempre podemos despejar x e y en función de z (¿qué pasa si $x_0 = 0$, $y_0 = 0$? ¿el punto $(0, 0, z)$ está en las superficies de nivel para algún valor de z? ¿depende el resultado de los valores de a y de b).

¿Qué hay de las derivadas? Fácil, hacemos exactamente lo mismo que antes. Como tenemos que $x = x(z), y = y(z)$, entonces

$$z^2 + x(z)y(z) - a = 0 \Rightarrow 2z + x'(z)y(z) + y'(z)x(z) = 0$$
$$z^2 + x(z)^2 - y(z)^2 - b = 0 \Rightarrow 2z + 2x(z)x'(z) - 2y(z)y'(z) = 0$$

¿Por qué este sistema tiene siempre solución? Pista: ¡¡recuerden lo que saben de matrices!!. Si no lo saben... sépanlo :P. Fíjense que podemos escribir eso de la forma:

$$\begin{pmatrix} y(z) & x(z) \\ 2x(z) & -2y(z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'(z) \\ y'(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ -2z \end{pmatrix}$$

Como el determinante de la matriz de la izquierda (¿les parece conocida? ¿este comentario les suena repetido?) es distinto de cero, el sistema se puede despejar. Evaluando finalmente en (x_0, y_0, z_0), tenemos que:

$$x'(z_0) = -\frac{2y_0 z_0 + x_0 z_0}{x_0^2 + y_0^2} \qquad y'(z_0) = -\frac{2x_0 z_0 + y_0 z_0}{x_0^2 + y_0^2}$$