

# Análisis I - Matemática 1

## Lista de temas teóricos para el examen final

Válidos para todas las cursadas hasta el Curso de verano de 2007 inclusive.

### I. Sucesiones numéricas

1. Si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  y  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  son sucesiones que convergen a  $\ell_1$  y  $\ell_2$  respectivamente, entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \ell_1 \ell_2$ .
2. Toda sucesión convergente es acotada.
3. Toda sucesión creciente y acotada superiormente es convergente.
4. La sucesión  $(1 + \frac{1}{n})^n$  es creciente y acotada.

### II. Una variable

1. Si una función continua  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es positiva en un punto  $x_0$  entonces existe un intervalo abierto  $I$  que contiene a  $x_0$  y tal que  $f(x) > 0$  para todo  $x \in I$ .
2. a) Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es tal que  $f(a) < 0 < f(b)$  entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$ .  
b) Corolario: Teorema de valores intermedios.
3. Sea  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in (a, b)$  es un extremo local y  $f$  derivable en  $x_0$  entonces  $f'(x_0) = 0$ .
4. Teorema de Rolle: Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y derivable en  $(a, b)$ . Si  $f(a) = f(b)$  entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ .
5. Teorema de Lagrange: Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua y derivable en  $(a, b)$ . Entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .
6. Teorema de Cauchy: Sean  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas y derivables en  $(a, b)$ . Entonces existe  $c \in (a, b)$  tal que  $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$ .
7. Fórmula de Taylor y expresión del resto de Lagrange.

### III. Series

1. Si una serie converge absolutamente entonces converge.
2. Criterio de D'Alembert (o del cociente)

3. Criterio de Cauchy (o de la raíz).
4. Criterio de Leibniz para series alternadas.
5. Existencia del radio de convergencia de una serie de potencias.

#### IV. Varias variables

1. Si una función es diferenciable en  $(x_0, y_0)$  entonces es continua en  $(x_0, y_0)$ .
  2. Sea  $B$  una bola abierta alrededor del punto  $(x_0, y_0)$  tal que  $f$  es de clase  $C^1$  en  $B$ , entonces  $f$  es diferenciable en  $(x_0, y_0)$ .
  3. Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en un punto  $P \in \mathbb{R}^n$ , sea  $v \in \mathbb{R}^n$  con  $\|v\| = 1$ . Entonces  $\frac{\partial f}{\partial v}(P)$  existe y es igual a  $\nabla f(P) \cdot v$  (el producto interno entre  $\nabla f(P)$  y  $v$ ).
  4. Teorema del valor medio en varias variables en regiones convexas.
  5. Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en un punto  $P \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\nabla f(P) \neq 0$ . Entonces en el punto  $P$ ,  $\nabla f(P)$  apunta en la dirección de máximo crecimiento de  $f$ .
  6. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$  en una bola  $B$  alrededor de un punto  $P$ . Demostrar que entonces  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(P) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P)$ .
  7. Polinomio de Taylor y resto de Lagrange de orden 3 para funciones de clase  $C^3$  en 2 variables.
  8. Sea  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en  $P$  y  $P$  un extremo local de  $f$ , entonces  $\nabla f(P) = 0$ .
  9. Sean  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $P \in \mathbb{R}^2$  tal que  $\nabla g(P) \neq (0, 0)$  y  $g(P) = 0$ . Entonces, si  $P$  es un extremo local de  $f$  sujeta a la restricción  $g = 0$ , se tiene que  $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$  para algun  $\lambda \in \mathbb{R}$ .
-