ANÁLISIS I – MATEMÁTICA 1

Práctica 1

Preliminares

1. Resolver las siguientes inecuaciones:

   a) $|x+3|<1$ *b)* $|3x-1|<|x-1|$ *c)* $|x-3|\geq 1$

   d) $|x|>|x+3|$ *e)* $\left|\dfrac{x-2}{3x+1}\right|\leq 1$

2. Representar los siguientes conjuntos en $\mathbb{R}$:

   a) $\{x : |x-1|<1, x\notin\mathbb{Z}\}$ *b)* $\{x : |x-3|<|2-x|\}$

   c) $\{x : 0<x^2\leq x^3\}$

3. Representar los siguientes conjuntos en la recta real:

   a) $A=\{x\in\mathbb{R} : |x+3|+|x-9|>2\}$;
   b) $B=\{x\in\mathbb{R} : \big||x+2|-|x-1|\big|<1\}$;
   c) $C=\{x\in\mathbb{R} : |x^3-1|+|2-x^3|=1\}$.

4. Sea $a\geq 0$. Determinar para qué valores de b se verifican cada una de las siguientes condiciones:

   a) $|a+b|=|a|+|b|$ *b)* $|a+b|<|a|+|b|$

   c) $|a-b|=|a|+|b|$ *d)* $|a-b|<|a|+|b|$

   e) $\big||a|-|b|\big|=|a-b|$ *f)* $\big||a|-|b|\big|<|a-b|$

5. Sean a y b números reales. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles no.

   a) $a<a^2$ *b)* $a<b\Rightarrow a^2<b^2$

   c) $a>0\Rightarrow ab\geq b$. *d)* $a+b\geq \text{máx}\{a,b\}$

   Indicar en cada caso, si es posible, para qué valores de a y de b son válidas las afirmaciones anteriores.

6. Sean $0\leq x\leq y$. Probar que $x\leq\sqrt{xy}\leq\frac{x+y}{2}\leq y$.

7. *a*) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados superiormente:
   1) $\mathbb{R}_{>0}$;
   2) $\{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} \text{ con } n = m^2\}$.

   b) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados inferiormente:
   1) $\mathbb{Z}$;
   2) $\{x^{-1} : x < 0\}$;
   3) $\mathrm{Im}(f)$ donde $f(x) = -x^2 + 2x + 1$.

8. Determinar si los siguientes conjuntos poseen supremo, ínfimo, máximo y mínimo. En caso de poseerlos, calcularlos:

   a) $\{n \in \mathbb{N} : 20 < n \leq 35\}$ *b*) $\{\frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

   c) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ *d*) $\{\frac{2n}{7n-3} : n \in \mathbb{N}\}$

9. *a*) Probar que el conjunto $A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$ no tiene máximo ni supremo en $\mathbb{Q}$.

   b) Probar que el conjunto $B = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 > 2\}$ no tiene mínimo ni ínfimo en $\mathbb{Q}$.

   Sugerencia: en (a) mostrar explícitamente que, dado $a \in A$, existe un elemento mayor que a en A y en (b) proceder análogamente.

10. Calcular

    a) $\sup\{\frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$ *b*) $\sup\{\frac{\sqrt{n+1}}{10+n} : n \in \mathbb{N}\}$

    c) $\inf\{(1 + \frac{1}{n})^n : n \in \mathbb{N}\}$ *d*) $\inf\{n^2 - 9n - 10 : n \in \mathbb{N}\}$

11. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (justificar la respuesta con una demostración o un contraejemplo):

    a) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ entonces $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

    b) Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > 0$ para todo $n \geq n_0$.

    c) Si $a_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y converge, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < 2$.

    d) Si $a_n < 2 - \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y converge,entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n < 2$.

12. Calcular $\ell = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n}$ y determinar, para cada $\varepsilon > 0$ de la siguiente tabla, un valor $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que $|\frac{n+1}{n} - \ell| < \varepsilon$ si $n > n_0$.

ε	$0,1$	$0,027$	$0,00001$	10^{-6}
n_0				

13. Probar los siguientes límites:

    a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ con $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}} + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{2n}}$

    b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$ con $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

    Sugerencia: Notar que, en ambos casos, a_n consta de una suma de $n + 1$ términos.

14. Sea $a_n = \frac{4n-10}{n+1}$.

   a) Encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumpla que $3 < a_n < 5$.

   b) Encontrar $\max\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\min\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

15. Probar que toda sucesión convergente es acotada.

16. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado y sea $s = \sup(A)$. Probar que existe una sucesión a_n contenida en A que converge a s. Probar el resultado análogo para el ínfimo de A.

17. Sea a_n una sucesión monótona acotada. Probar que a_n es convergente.

18. (Aproximación de la raíz cuadrada de $b > 0$) Considerar la sucesión definida de la siguiente manera:

$$a_1 = a > 0 \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{b}{a_n}\right)$$

   a) Probar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que a_n es decreciente todo $n \geq n_0$.

   b) Probar que a_n está acotada inferiormente (ver ejercicio 10).

   c) Probar que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{b}$.

Métricas y topología en $\mathbb{R}^n$

19. *Resolver* las siguientes ecuaciones e inecuaciones en $\mathbb{R}^2$. Representar las soluciones en el plano.

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 \leq 2\}$ *b*) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-y| > 2\}$

c) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ *d*) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$

e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 3\}$ *f*)$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-2| + |y+1| \geq 1\}$

g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \text{máx}\{|x|;|y|\} = 1\}$ *h*)$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \text{máx}\{|x|;|y|\} < 1\}$

20. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, se define $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ y $\|x\|_\infty = \text{máx}\{|x_i| : i = 1,...,n\}$
    a) Mostrar que si $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que
    1) $|x_i| \leq \|x\|_2$, si $i = 1,\ldots,n$;
    2) $\|x\|_2 \leq \sqrt{n}\ \|x\|_\infty$;
    3) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\ \|x\|_\infty$. Describir geométricamente esta doble desigualdad.

    b) Usando lo hecho, concluir que:
    $$\{x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{n}\ \|x\|_\infty < r\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < r\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty < r\}.$$
    c) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Mostrar la equivalencia de los siguientes dos enunciados:
    1) A es abierto;
    2) cualquiera sea $y \in A$, existe $r > 0$ tal que
    $$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - y\|_\infty < r\} \subseteq A.$$

21. *a*) Mostrar que los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son abiertos
    1) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 7\}$;
    2) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y > 1\}$;
    3) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \vee y \neq 0\}$.

    b) Dar un ejemplo de un conjunto en $\mathbb{R}^3$ que no sea ni abierto ni cerrado.

22. Para cada uno de los siguientes conjuntos $A \subset \mathbb{R}^3$, calcular ∂A, $\bar{A}$, $\bar{A} \setminus A$ y $A \setminus \partial A$:
    a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$;
    b) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \wedge z < 2\}$;
    c) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \wedge x^2 + y^2 + (z+1)^2 < 1\}$;
    d) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \wedge x^2 + y^2 > 1/2\}$.

23. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^2$ son cerrados y acotados:
    a) $K_1 = B_1(0) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$;
    b) $K_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
    c) $K_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$;
    d) $K_4 = \{(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$;
    e) $K_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge y = 0\}$.

24. En cada uno de los siguientes casos, encuentre una sucesión de puntos de A que no posea ninguna subsucesión convergente a un punto de A:
    a) $A = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$;
    b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$.