

ANÁLISIS I – MATEMÁTICA 1

PRÁCTICA 2

Funciones de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m

1. Dar el dominio de definición para cada una de las siguientes funciones y graficarlo:

$$a) f(x, y) = \ln(16 - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - 4) \quad b) f(x, y) = \sqrt{6 - (2x + 3y)}$$

$$c) f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} + \sqrt{y - x^2} \quad d) f(x, y) = \frac{1}{x}$$

$$e) f(x, y) = \frac{\ln(1 - y + x^2)}{\sin x} \quad f) f(x, y) = \int_x^y \frac{1}{1 + t^2} dt$$

$$g) f(x, y) = \frac{\cos x}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} \quad h) f(x, y) = \frac{\sin x^2 y}{\ln(1 - x^2)}$$

2. Encontrar las curvas de nivel de las siguientes funciones:

$$a) f(x, y) = x + y \quad b) f(x, y) = x^2 + y^2$$

$$c) f(x, y) = \sqrt{xy} \quad d) f(x, y) = \frac{y}{x^2}$$

$$e) f(x, y) = x^2 - y^2$$

3. Estudiar las superficies de \mathbb{R}^3 representadas por las siguientes ecuaciones y determinar cuáles de estas superficies son la gráfica de una función $z = f(x, y)$.

$$a) z = 2x^2 + y^2 \quad b) z^2 = 1 - x^2 - \frac{y^2}{2} \quad c) z = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$d) 3x + 2y - z = 0 \quad e) z = x^2 y^2 + 1 \quad f) z^2 = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} - 2$$

$$g) 6x^2 + y^2 - z^2 = 1 \quad h) z = \frac{y}{\sqrt{x}}, \text{ con } x > 0$$

4. Encontrar las superficies de nivel de las siguientes funciones:

$$a) u = x + y + z \quad b) u = x^2 + y^2 - z^2$$

$$c) u = x^2 + y^2 + z^2 \quad d) u = x^2 + 2y^2$$

Límite y continuidad

5. ¿A qué distancia de 16 basta tomar x para asegurar que:

$$a) \frac{1}{\sqrt{x}} \in (0, \frac{1}{2})? \quad b) \frac{1}{\sqrt{x}} \in (\frac{1}{4} - \frac{1}{10}, \frac{1}{4} + \frac{1}{10})? \quad c) \frac{1}{\sqrt{x}} \in (\frac{1}{4} - \frac{1}{1000}, \frac{1}{4} + \frac{1}{1000})?$$

6. Analizar la existencia de $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ para cada $a \in \mathbb{R}$ siendo:

$$a) f(x) = x - [x]. \quad b) f(x) = \frac{x}{[x]}. \quad c) f(x) = |x| + [x].$$

($[x]$ denota la parte entera de x .)

7. Calcular, si existen, los siguientes límites:

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + \sin x}{e^x + \cos x} & b) \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{[x^2] - [x]^2}{x^2 - 9} & c) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin x \\ d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1/x}}{\ln|x|} & e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} & f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{x} \\ g) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/\tan x} & h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} & i) \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x} \end{array}$$

8. a) Usando sólo la definición de límite demostrar que:

$$1) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} x + y = 1;$$

$$2) \lim_{(x,y) \rightarrow (-1,8)} xy = -8.$$

b) Si $\varepsilon = 1$, $\varepsilon = 1/100$ ó $\varepsilon = \alpha^2$, encontrar $\delta > 0$ tal que

$$\|(x, y) - (-1, 8)\| < \delta \implies |xy + 8| < \varepsilon.$$

9. Probar por definición que si $(x, y) \rightarrow (2, 3)$ entonces $y \operatorname{sen}(xy - 6) \rightarrow 0$.

10. Probar que:

$$a) \lim_{(x,y) \rightarrow (7,2)} x^2 + y^2 - xy = 39; \quad b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \sin(x \cos y) = 0;$$

$$c) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} xe^{xy} = 0; \quad d) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,3)} \frac{y^2 + \cos(\pi - x)}{y} = \frac{8}{3}.$$

$$e) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} ye^x = 1; \quad f) \lim_{(x,y) \rightarrow (c,0)} \frac{\sin x^2 y}{x^2 - y^2} = 0 \text{ si } c \neq 0;$$

11. a) Sea $f : B_r(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = 0$. Probar que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{\sin f(x, y)}{f(x, y)} = 1.$$

b) Sea $f : B_r(a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = +\infty$. Probar que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} \frac{\ln f(x, y)}{f(x, y)} = 0.$$

12. Calcular:

- a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$;
- b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,2)} \frac{\sin xy}{x}$;
- c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$.

13. Analizar la existencia de los límites restringido a los ejes coordenados y del límite doble de las siguientes funciones en el origen:

- a) $f(x, y) = \frac{x - y}{x + y}$;
- b) $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$;
- c) $f(x, y) = \frac{\sin x}{y}$;
- d) $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2}$
- e) $f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{xy + y - x}$;
- f) $f(x, y) = |x|^y$;
- g) $f(x, y) = \frac{\sin(x^3 + y^3)}{x^2 + y^2}$;
- h) $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{x^2 y^2}$;
- i) $f(x, y) = \frac{x^2 y^2 - x^2 + 1}{x^2 - y^2}$;
- j) $f(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$;
- k) $f(x, y) = \frac{xy}{|x| + |y|}$;
- l) $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$;
- m) $f(x, y) = x \ln(x^2 + y^2)$
- n) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$
- o) $f(x, y) = x \sin \frac{\pi}{y} + y \sin \frac{\pi}{x}$;
- p) $f(x, y) = \sin \frac{x}{y}$;

14. Demostrar que las siguientes funciones tienden a cero si (x, y) se aproxima al origen a lo largo de cualquier recta, pero que para ninguna de ellas existe el límite cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$

- a) $f(x, y) = \frac{x^4 y^4}{(x^2 + y^4)^3}$;
- b) $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2 - x}$;
- c) $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$;
- d) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x^2 - y)y}{x^4}, & \text{si } 0 < y < x^2; \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$

15. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la siguiente función:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4(x+1)}{|x+1|^3 + 2|y|^3} & (x, y) \neq (-1, 0) \\ 1 & (x, y) = (-1, 0) \end{cases}$$

- a) Probar que f no es continua en $(-1, 0)$.
- b) Redefinirla en $(x, y) = (-1, 0)$, si es posible, de manera tal que resulte continua en \mathbb{R}^2 .

16. Consideremos la función

$$f(x, y) = x \cdot y \cdot \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}.$$

a) Calcular su dominio natural.

b) Determinar si es posible extenderla a \mathbb{R}^2 de modo que resulte continua.

17. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones en los puntos indicados

$$a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0); \end{cases} \quad \text{en } (1, 0) \text{ y } (0, 0);$$

$$b) f(x, y) = \begin{cases} |y|^x(1+x)^y, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \text{ y } x > -1; \\ 1, & \text{si } (x, y) = (0, 0); \end{cases} \quad \text{en } (1, 0) \text{ y } (0, 2);$$

$$c) f(x, y) = \sin(x \cos y) \quad \text{en } (1, 1) \text{ y } (0, 2);$$

$$d) f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{si } x \neq 0 \text{ e } y \neq 0; \\ 1, & \text{en otro caso;} \end{cases} \quad \text{en } (0, 0) \text{ y } (1, 1);$$

$$e) f(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } xy \neq 0; \\ 0, & \text{si } xy = 0; \end{cases} \quad \text{en } (1, 0) \text{ y } (-1, 2).$$

18. Probar que la siguiente función no tiene límite cuando $(x, y) \rightarrow (0, 0)$.

$$f(x, y) = \frac{\text{sen}(xy)}{|x - y|}$$

Sugerencia: Mostrar antes que nada que si el límite existe debe valer cero. Después, calcular el dominio de f . Finalmente, elegir:

- PLAN A: Encontrar alguna trayectoria que pase por el origen sobre la cual f no tienda a cero.
- PLAN B: Considerar la sucesión de puntos $p_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1})$, probar que esta sucesión tiende a cero y calcular el $\lim_{n \rightarrow \infty} f(p_n)$.
- PLAN C: Probar que debe existir un entorno del origen en donde f esté acotada. Mostrar que esto no puede ocurrir.

19. Analizar la existencia de límite en el origen para

$$f(x, y) = \frac{e^{(x^2+y^3)} - 1}{xy - x + y^2}$$

20. Probar que si $\|(x, y) - (1, 0)\| < \frac{1}{2}$ entonces $(x-1)^2 + y^2|x| \geq \frac{1}{2}((x-1)^2 + y^2)$.

21. Estudiar la continuidad de f en el punto $(1, 0)$.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-1)^{\frac{4}{3}}y}{(x-1)^2+y^2|x|} & \text{si } (x, y) \neq (1, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (1, 0) \end{cases}$$

22. Estudiar la continuidad de f en el origen de coordenadas.

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2 - \tan(x^2y)}{\frac{1}{2}x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

23. Demostrar que la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0); \end{cases}$$

es continua respecto de cada una de las variables por separado pero no lo es como función de ambas.

24. Probar que si $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $x = a$ y la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por $f(x, y) = g(x)$, entonces f es continua en todo punto de la recta (a, y) . Usar esto para probar que las siguientes funciones son continuas en todo \mathbb{R}^2 :

$$(a) \quad f(x, y) = \text{sen}(x). \quad (b) \quad f(x, y) = \text{sen}(x^2) + e^y.$$

25. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones

$$(a) \quad f(x, y) = (x^2, e^x) \quad (b) \quad f(x, y) = \left(\frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}, \frac{e^{x^2 + y^2} - 1}{x^2 + y^2} \right)$$

26. a) Sea $f : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{1 - \|x\|}$. Probar que f es continua y no es acotada.

b) Sea $g : B_1(0) \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \|x\|$. Probar que g es continua y acotada pero no alcanza su máximo en $B_1(0)$.

27. Sea $f(x, y) = \frac{\sin(x^2y)}{\ln(1 - x^2)}$

a) Encontrar el dominio D de f y gráfiquelo.

b) Dado $q = (q_1, q_2) \in Fr(D)$. ¿Existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (q_1, q_2)} f(x, y)$?

28. Definimos $F : \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$F(x_1, x_2, \dots, x_9) = \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}.$$

a) Sea $a \in \mathbb{R}^9$. Mostrar que si $F(a) \neq 0$, entonces hay un entorno U de a tal que si $x \in U$ entonces $F(x) \neq 0$.

b) Concluir que si $a \in \mathbb{R}^9$ es tal que la matriz $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_7 & a_8 & a_9 \end{pmatrix}$ es inversible, entonces existe un entorno U de a tal que si $x \in U$, la matriz $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$ también lo es.