ANÁLISIS I – MATEMÁTICA 1

Práctica 4

Diferenciación
SEGUNDA PARTE

1. Sean $f(u,v,w) = u^2 + v^3 + wu$ y $g(x,y) = x\sin y$. Además, tenemos la siguiente dependencia respecto de t,
$$u(t) = t^2 + 1, v(t) = \sin t, w(t) = t - 1 \text{ y } x(t) = \sin t, y(t) = t,$$
donde t es una nueva variable. Bajo estas condiciones, calcular las derivadas respecto de t de las funciones
$$f\left(u(t), v(t), w(t)\right) \text{ y } g\left(x(t), y(t)\right),$$
en dos formas diferentes:
   a) usando la regla de la cadena
   b) sustituyendo

2. Sean $f(u,v) = e^{uv}\sin(u^2+v^2), g(u,v,w) = \ln(u^2+v^2+w^2+1)$. Dadas
$$u(x,y) = x+y, v(x,y) = xy, w(x,y) = x-y+1$$
calcular las derivadas parciales de las funciones
$$f\left(u(x,y), v(x,y)\right) \text{ y } g\left(u(x,y), v(x,y), w(x,y)\right)$$
   a) usando la regla de la cadena
   b) sustituyendo

3. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:
   a) $f(x,y) = \int_0^{2y} x^2z + z^3 dz$
   b) $f(x,y) = \int_{\sqrt{x}}^{x} \sin(xyz)dz$
   c) $f(x,y,z) = \int_5^{x+2y} \sin(x^2+yz+t)dt$

4. Sean $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivables y $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:
   a) $F(x,y) = G\left(f(x)g(y), f(x)h(y)\right)$
   b) $F(x,y) = G(x^y, y^x) \quad (x, y > 0)$
   c) $F(x,y) = G(x, G(x,y))$
   d) $F(x,y) = f(x)^{g(y)} \quad (\text{si} f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R})$
   e) $F(x,y) = G\left(\int_x^{f(y)} h(t)dt, g(y)\right)$

5. a) ¿Para qué valores de $p \in \mathbb{R}_{>0}$ es

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)^p \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

diferenciable en $\mathbb{R}^2$?¿Para qué valores de p es f de clase C^1?

b) La función f se puede escribir como $g(x^2+y^2)$ con $g(t) = t^p \operatorname{sen} \frac{1}{t}$ si $t > 0$ y $g(0) = 0$. ¿Qué conclusiones se obtienen si se estudia la diferencibilidad de g?

6. *a*) Coordenadas polares
Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, sean $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ y $g(r,\theta) = f(x,y)$.
Calcular $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad sobre f.

b) Coordenadas esféricas
Dada $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, sean $x = r\cos(\theta)\sin(\phi)$, $y = r\sin(\theta)\sin(\phi)$, $z = r\cos(\phi)$ y sea

$$g(r,\theta,\phi) = f(x,y,z)$$

Calcular $\dfrac{\partial g}{\partial r}$, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ y $\dfrac{\partial g}{\partial \phi}$ imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad sobre f.

c) Coordenadas cilíndricas
Dada $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, sean $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ y $g(r,\theta,z) = f(x,y,z)$.
Calcular$\dfrac{\partial g}{\partial r}$, $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ y $\dfrac{\partial g}{\partial z}$ imponiendo condiciones adecuadas de diferenciabilidad sobre f.

7. Como una consecuencia del Teorema de Lagrange mostrar que son válidas las siguientes acotaciones

a) $|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leq |x-y|$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

b) $|1/x - 1/y| \leq |x-y|$, para $x, y > 1$.

c) $|\arctan a - \arctan b| \leq \dfrac{1}{2}|a-b|$, para $a, b \geq 1$.

Para cada una de las funciones involucradas en las acotaciones anteriores encontrar la dependencia explícita de δ (respecto de ϵ y x_0) al estudiar la continuidad de la función en x_0.

8. En este ejercicio vamos a dar una demostración del siguiente resultado:

Teorema del Valor Medio: *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable definida sobre el abierto U. Sean P_1 y P_2 dos puntos cualesquiera de U tales que el segmento P_1P_2 (que une P_1 con P_2) está contenido en U. Entonces existe un punto P en el segmento P_1P_2 tal que*

$$f(P_1) - f(P_2) = \nabla f(P) \cdot (P_1 - P_2),$$

donde $\cdot$ denota el producto escalar de vectores.

Notemos que este resultado es una generalización del Teorema de Lagrange al caso multidimensional.

a) Encontrar una parametrización $\sigma(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de la recta que une P_1 y P_2 tal que $\sigma(0) = P_1$ y $\sigma(1) = P_2$.

b) Probar que existe c en el intervalo $(0,1)$ tal que $(f \circ \sigma)(1) - (f \circ \sigma)(0) = (f \circ \sigma)'(c)$.

c) Deducir el Teorema del Valor Medio.

9. *a*) Sea $f : B \to \mathbb{R}$, donde B es una bola en $\mathbb{R}^2$.
   1) Probar que si f es constante en B, entonces $\nabla f(a,b) = 0$, cualquiera sea $(a,b) \in B$.
   2) Probar que si $\nabla f(a,b) = 0$ para cada $(a,b) \in B$, entonces f es constante en B. (*Sugerencia:* utilizar el Teorema de Valor Medio.)

   b) Si $f, g : B \to \mathbb{R}$ son diferenciables, y verifican que $\nabla f(a,b) = \nabla g(a,b)$ para todo $(a,b) \in B$, probar que entonces existe $c \in \mathbb{R}$ tal que
$$f(x,y) = g(x,y) + c.$$

10. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la esfera de radio 1 centrada en el origen; es decir, S es la superficie de $\mathbb{R}^3$ definida por $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. Mostrar que el vector $v = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ es normal a la superficie S en el punto $\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e interpretar este hecho geométricamente.

11. Consideremos la superficie $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$. Probar que las rectas
$$\mathbb{L}_1 : t(0,1,1) + (1,0,0) \quad \text{y} \quad \mathbb{L}_2 : t(0,1,-1) + (1,0,0)$$
son ortogonales y están contenidas en S. Encontrar la ecuación del plano tangente a S en $(1,0,0)$.

12. Calcular la ecuación del plano tangente y de la recta normal, cuando existan, a las superficies dadas en los puntos indicados
   a) $x^{10}y - \cos(z)x + 7 = 0 \qquad x_0 = (7,0,0)$
   b) $xy - z\ln(y) + e^{xy} = 1 \qquad x_0 = (0,1,1)$
   c) $xy\sin(y) + ze^{xy} - z^2 = 0 \qquad x_0 = (4,0,1)$
   d) $\cos(x)\cos(y)e^z = 0 \qquad x_0 = (\pi/2,1,0)$

13. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en (x_0,y_0) y sea $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la función definida por $h(x,y,z) = f(x,y) - z$. ¿Qué relación existe entre el plano tangente al gráfico de f en (x_0,y_0) y el plano tangente a una superficie de nivel de h en $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$.

14. Encontrar los planos tangentes a la superficie
$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21\}$$
que sean paralelos al plano $\Pi : x + 4y + 6z = 8$.

15. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = x^5 + x^3 + x$. Probar que f es biyectiva y que la inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es diferenciable. Encontrar la ecuación de la recta tangente al gráfico de f^{-1} en el punto $(3, f^{-1}(3))$. ¿Cuánto vale $(f^{-1})'(a)$ para cada $a \in \mathbb{R}$?

16. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal $T(x,y) = (3x - 2y, 5x - 2y)$. Mostrar que T es un isomorfismo, encontrar la expresión de la inversa T^{-1} y calcular $DT^{-1}(a)$ para cada $a \in \mathbb{R}^2$.

17. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $F(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$. Probar que para cada $a \in \mathbb{R}^2$ el determinante de la diferencial $|DF(a)|$ es distinto de cero aunque F no es inyectiva.

18. Determinar si las siguientes aplicaciones son localmente inversibles de clase C^1 en a y calcular la diferencial de F^{-1} en el punto $F(a)$.
   a) $F(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ en $a = (x,y) \neq (0,0)$
   b) $F(x,y) = (\sin x, \cos(xy))$ en $a = (\pi, \pi/2)$

19. Encontrar la solución $y = f(x, z)$ de $x^2 + y^2 - z^3 = 0$ en un entorno de los siguientes puntos del plano xz y escribir explícitamente esos entornos.

    a) $(0, 1, 1)$

    b) $(2, -2, 2)$

20. Sea $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$F(x, y) = (x^3y + 3x^2y^2 - 7x - 4y, xy + y)$$

    a) Demostrar que existe un entorno $U \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $(1, 1) \in U$, un entorno $V \subseteq \mathbb{R}^2$ tal que $(-7, 2) \in V$ y una inversa para F, $F^{-1} : V \to U$, C^1 tal que $F^{-1}(-7, 2) = (1, 1)$.

    b) Sean $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función C^1 tal que $\frac{\partial g}{\partial x}(1, 1) = 2$, $\frac{\partial g}{\partial y}(1, 1) = 5$ y $v = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$. Calcular $\frac{\partial (goF^{-1})}{\partial v}(-7, 2)$.

21. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y, z) = x^3 - 2y^2 + z^2$$

    a) Demostrar que $f(x, y, z) = 0$ define una función implícita $x = \varphi(y, z)$ en el punto $(1, 1, 1)$.

    b) Encontrar $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(1, 1)$ y $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(1, 1)$.

22. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y) = (y\sqrt{x^3} + (y + 1)^2 - 6 \ , (\ln(x) + 5)y - 4)$$

    a) Probar que existe una inversa de f definida en un entorno del punto $p = (5, 6) = f(1, 2)$, diferenciable en p.

    b) Sean $v = (1, 2)$, $w = (2, 3)$ vectores en $\mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función diferenciable en $q = (1, 2)$ tal que $\frac{\partial g}{\partial v}(1, 2) = 4$ y $\frac{\partial g}{\partial w}(1, 2) = 5$. Calcular $D(g \circ f^{-1})(5, 6)$.

23. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y, z) = x^2y + \ln(y)z - 1$$

    a) Probar que la ecuación $f(x, y, z) = 0$ define implícitamente una función $y = \varphi(x, z)$ (diferenciable) en un entorno del punto $(x, z) = (1, 2)$ tal que $f(x, \varphi(x, z), z) = 0$ para todo (x, z) en dicho entorno.

    b) Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ una función diferenciable tal que $Dg(2, -3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ y que cumple que $g(2, -3) = (1, 2)$. Sea $v = (4, 1)$. Calcular $\frac{\partial(\varphi \circ g)}{\partial v}(2, -3)$.

24. Determinar las derivadas parciales de las funciones que quedan definidas implícitamente en un entorno del punto dado mediante las relaciones

    a) $f(x, y) = \frac{1}{4}x^2 - y^2 = 1 \quad a = (2, 0)$

    b) $g(x, y) = x^5 + y^y + xy = 3 \quad a = (1, 1)$

    c) $h(x, y, z) = x^3 + 2y^3 + z^3 - 3xyz - 2y - 8 = 0 \quad a = (0, 0, 2)$

25. Considerar las superficies definidas por las siguientes ecuaciones:

$$z = 4x^2 - 3y^2 \qquad \text{y} \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 24$$

    a) Probar que existe un entorno del punto $P = (2, -2, 4)$ en donde la intersección de las dos superficies se puede escribir como una curva.

    b) Hallar la recta tangente a dicha curva en el punto P.

26. Consideremos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \frac{2}{3}x & + & 3y & - & 7z & = & 0 \\ -x & - & 2y & + & \frac{21}{2}z & = & 0 \end{cases}$$

a) Teniendo en cuenta que el sistema tiene dos ecuaciones linealmente independientes en tres incógnitas, del Teorema de la dimensión deducimos que podemos despejar dos incógnitas en función de una sola variable libre. Resolver entonces el sistema de ecuaciones despejando x y z en función de y.

b) ¿Alguna dificultad en el ítem anterior?

c) ¿Cuáles son los menores no nulos de la matriz? ¿Cuáles son entonces los posibles despejes?

27. El paraboloide $3x^2 + 2y^2 - 2z = 1$ y la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 2 = 0$ se cortan en el punto $(1, 1, 2)$:

a) Hallar los planos tangentes a cada superficie en dicho punto, probar que ambos planos se cortan ortogonalmente y encontrar la recta de intersección.

b) Usando el teorema de la función implícita, probar que en dicho punto, las dos superficies se cortan ortogonalmente y que la recta tangente a la curva de intersección de las dos superficies en dicho punto es la intersección de los dos planos tangentes.