ANÁLISIS I – MATEMÁTICA 1

Práctica 5

Polinomio de Taylor - Extremos

1. Calcular las derivadas parciales de segundo orden para las siguientes funciones, verificando la igualdad de las derivadas parciales mixtas para aquellas funciones de clase C^2:

   a) $f(x,y) = x^3y + e^{xy^2}$

   b) $f(x,y,z) = ye^z + \frac{e^y}{x} + xy\,\mathrm{sen}(z)$

   c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2} + \ln(z)$

2. Calcular todas las derivadas de tercer orden para las siguientes funciones:

   a) $f(x,y,z) = xyz$

   b) $f(x,y,z) = e^{xyz}$

   c) $f(x,y,z) = \cos(x^2+y) - \mathrm{sen}(y^2z)$

   d) $f(x,y,z) = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1}$

3. Probar que si f es $C^3(\mathbb{R}^3)$ entonces:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$$

   ¿Cuáles otras son iguales?

4. Sea $f(x,y) = \cos(xy)$. Además, x e y son funciones de las variables u y v de acuerdo a las siguientes fórmulas: $x(u,v) = u+v$, $y(u,v) = u-v$. Calcular

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} f\left(x(u,v), y(u,v)\right) \qquad \text{y} \qquad \frac{\partial^3}{\partial u \partial y^2} f\left(x(u,v), y(u,v)\right)$$

   a) Sustituyendo

   b) Usando la regla de la cadena.

5. *Laplaciano - Función armónica*

   Se dice que una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2 satisface la ecuación de Laplace o bien que es una función armónica en un conjunto abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ si:

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + ... + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \nabla^2 f \equiv 0 \text{ en } U$$

   Verificar que las siguientes funciones son armónicas en $U \subset \mathbb{R}^3$ abierto. Determinar U en cada caso:

a) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - 2z^2$
b) $f(x,y,z) = \ln\sqrt{x^2+y^2}$
c) $f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
d) $f(x,y,z) = e^{3x+4}\cos(3z) + 4y$

6. Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = g(||x||)$. Demostrar que:

$$\triangle f(x) = \frac{d^2 g}{dt}(||x||) + \frac{2}{||x||}\frac{dg}{dt}(||x||)$$

7. Sean f, g dos funciones C^2 definidas en un abierto $U \subset \mathbb{R}^2$ y tales que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial y} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

Probar que f y g son armónicas en U.

8. Calcular la fórmula de Taylor de segundo orden para las funciones dadas en el punto indicado. Escribir la forma de Lagrange del residuo.

a) $f(x,y) = (x+y)^2$ en $(0,0)$
b) $f(x,y) = e^{x+y}$ en $(0,0)$
c) $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2+1}$ en $(0,0)$
d) $f(x,y) = e^{(x-1)^2}\cos(y)$ en $(1,0)$
e) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$ en $(1,\pi)$
f) $f(x,y) = e^x \operatorname{sen}(y)$ en $(2, \frac{\pi}{4})$
g) $f(x,y) = \ln(1+xy)$ en $(2,3)$
h) $f(x,y) = x + xy + 2y$ en $(1,1)$
i) $f(x,y) = x^y$ en $(1,2)$
j) $f(x,y,z) = x + \sqrt{y} + \sqrt[3]{z}$ en $(2,3,4)$

9. Utilizando los resultados anteriores calcular $(0{,}95)^{2{,}01}$

a) con error menor que $1/200$
b) con error menor que $1/5000$

10. Sea $f(x,y) = xe^y$.

a) Calcular el polinomio de Taylor de orden 1 de f en el punto $P = (1,0)$.
b) Usar este polinomio para aproximar el valor $f(0,98; 1,02)$. Estimar el error cometido.

11. Obtener la fórmula aproximada

$$\frac{\cos x}{\cos y} = 1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$$

para valores suficientemente pequeños de $|x|, |y|$.

12. a) Calcular el polinomio de Taylor de grado 1 centrado en $(1,1)$ de la función $f(x,y) = e^{x^2-y^2}$
b) Usar la parte a) para evaluar $e^{\frac{4}{10}}$ usando que $\frac{4}{10} = (1+\frac{1}{10})^2 - (1-\frac{1}{10})^2$.
Comprobar que el error que cometió es menor que 0,3

13. Calcular el polinomio de segundo grado que mejor aproxima en el origen a la función

$$f(x,y) = \sin(x)\sin(y).$$

14. *a*) Calcular los extremos de $f(x,y) = x^2 + y^4$ y de $g(x,y) = x^4 + y^4$ y sus hessianos en dichos puntos.

    b) Sea f de clase C^2 tal que tiene un extremo estricto en $a \in \mathbb{R}^n$. ¿Es necesariamente $Hf(a)$ definida positiva o negativa?

15. Encontrar los puntos críticos de las siguientes funciones y analizar cuáles son puntos de ensilladura:

    a) $f(x,y) = x^2 - y^2$

    b) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x$

    c) $f(x,y) = xy$

    d) $f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2 y}} & \text{si} \quad xy \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad xy = 0 \end{cases}$

16. Sea $f(x,y) = \left(y - 3x^2\right)\left(y - x^2\right)$. Probar que:

    a) $(0,0)$ es un punto de ensilladura.

    b) El determinante de la matriz $Hf(0,0)$ es cero.

    c) f tiene un mínimo relativo en $(0,0)$ sobre cada recta que pase por $(0,0)$, es decir, si $g(t) = (at, bt)$ entonces $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tiene un mínimo relativo en 0 para cada elección de a, b.

17. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$

    a) Probar que $(0,0)$ es un punto crítico pero no extremo.

    b) Probar que $\pm\sqrt{2}(1,-1)$ son mínimos absolutos. ¿Hay máximos relativos?

18. Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de clase C^2 no lineal tal que $Df(x_0) \neq 0$. Sea $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(x) = f(x) - Df(x_0)(x)$$

    a) Demostrar que x_0 es un punto crítico de g.

    b) Probar que $Hf(x_0) = Hg(x_0)$.

    c) ¿Qué pasaría con $g(x) = f(x) - Df(x_0)(x - x_0)$?

19. Para las siguientes funciones, encontrar los puntos críticos y analizar cuáles son máximos, mínimos locales o puntos de ensilladura:

    a) $f(x,y) = (2x + 1 - y)^2$

    b) $f(x,y) = x^2 - y^2 - xy + 3x + 3y + 1$

    c) $f(x,y) = 10x^2 + 10y^2 + 12xy + 2x + 6y + 1$

    d) $f(x,y) = e^{1+x^2+y^2}$

    e) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} + xy$

    f) $f(x,y) = (x-y)^2 + 1 + 2(x-y)$

    g) $f(x,y) = e^{x-y}\left(x^2 - 2y^2\right)$

    h) $f(x,y,z) = xy + z^2$

i) $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + z^2 - xy + 2xz + z$

j) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$

k) $f(x,y) = x^2 - 2xy^2 + y^4 - y^5$

l) $f(x) = \frac{1}{1+||x||^2}, \ \ x \in \mathbb{R}^n$

20. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que:

$$f(0,1) = 0, \nabla f(0,1) = (0,2) \text{ y } Hf(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Si $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ está definida por $g(x,y) = 3x^2y + e^{f(x,y)} - 2y$

a) Calcular $Hg(0,1)$

b) ¿Tiene g un extremo relativo en $(0,1)$?

21. Decidir si existen o no, números reales a y b tales que la función

$$f(x,y) = e^{y^4 - x^2} + a(x-y) + b(x-2)(y-1)$$

tenga un mínimo relativo en el punto $(2,1)$.