

ANÁLISIS I – MATEMÁTICA 1 – ANÁLISIS II (COMPUTACIÓN)

PRÁCTICA 1

Preliminares

1. Resolver las siguientes inecuaciones:

$$\begin{array}{lll} a) |x + 3| < 1 & b) |3x - 1| < |x - 1| & c) |x - 3| \geq 1 \\ d) |x| > |x + 3| & e) \left| \frac{x - 2}{3x + 1} \right| \leq 1 & \end{array}$$

2. Representar los siguientes conjuntos en \mathbb{R} :

$$\begin{array}{ll} a) \{x : |x - 1| < 1, x \notin \mathbb{Z}\} & b) \{x : |x - 3| < |2 - x|\} \\ c) \{x : 0 < x^2 \leq x^3\} & \end{array}$$

3. Representar los siguientes conjuntos en la recta real:

$$\begin{array}{l} a) A = \{x \in \mathbb{R} : |x + 3| + |x - 9| > 2\}; \\ b) B = \{x \in \mathbb{R} : ||x + 2| - |x - 1|| < 1\}; \\ c) C = \{x \in \mathbb{R} : |x^3 - 1| + |2 - x^3| = 1\}. \end{array}$$

4. Sea $a \geq 0$. Determinar para qué valores de b se verifican cada una de las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{ll} a) |a + b| = |a| + |b| & b) |a + b| < |a| + |b| \\ c) |a - b| = |a| + |b| & d) |a - b| < |a| + |b| \\ e) ||a| - |b|| = |a - b| & f) ||a| - |b|| < |a - b| \end{array}$$

5. Sean a y b números reales. Decidir cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles no.

$$\begin{array}{ll} a) a < a^2 & b) a < b \Rightarrow a^2 < b^2 \\ c) a > 0 \Rightarrow ab \geq b. & d) a + b \geq \max\{a, b\} \end{array}$$

Indicar en cada caso, si es posible, para qué valores de a y de b son válidas las afirmaciones anteriores.

6. Sean $0 \leq x \leq y$. Probar que $x \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2} \leq y$.

7. a) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados superiormente:

- 1) $\mathbb{R}_{>0}$;
- 2) $\{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} \text{ con } n = m^2\}$.

b) Mostrar que los siguientes conjuntos no están acotados inferiormente:

- 1) \mathbb{Z} ;
- 2) $\{x^{-1} : x < 0\}$;
- 3) $\text{Im}(f)$ donde $f(x) = -x^2 + 2x + 1$.

8. Determinar si los siguientes conjuntos poseen supremo, ínfimo, máximo y mínimo. En caso de poseerlos, calcularlos:

- | | |
|--|---|
| a) $\{n \in \mathbb{N} : 20 < n \leq 35\}$ | b) $\{(-1)^n : n \in \mathbb{N}\}$ |
| c) $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ | d) $\{\frac{2n}{7n-3} : n \in \mathbb{N}\}$ |

9. a) Probar que el conjunto $A = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 < 2\}$ no tiene máximo ni supremo en \mathbb{Q} .
 b) Probar que el conjunto $B = \{a \in \mathbb{Q} : a^2 > 2\}$ no tiene mínimo ni ínfimo en \mathbb{Q} .

Sugerencia: en (a) mostrar explícitamente que, dado $a \in A$, existe un elemento mayor que a en A y en (b) proceder análogamente.

10. Calcular

- | | |
|--|--|
| a) $\sup \{\frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$ | b) $\sup \{\frac{\sqrt{n+1}}{10+n} : n \in \mathbb{N}\}$ |
| c) $\inf \{(1 + \frac{1}{n})^n : n \in \mathbb{N}\}$ | d) $\inf \{n^2 - 9n - 10 : n \in \mathbb{N}\}$ |

11. Decidir si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (justificar la respuesta con una demostración o un contraejemplo):

- a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ entonces $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
- b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n > 0$ para todo $n \geq n_0$.
- c) Si $a_n < 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y converge, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 2$.
- d) Si $a_n < 2 - \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y converge, entonces $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n < 2$.

12. Calcular $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}$ y determinar, para cada $\varepsilon > 0$ de la siguiente tabla, un valor $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tal que $|\frac{n+1}{n} - \ell| < \varepsilon$ si $n > n_0$.

ε	0,1	0,027	0,00001	10^{-6}
n_0				

13. Probar los siguientes límites:

- a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ con $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2n}}$
- b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ con $a_n = \frac{1}{\sqrt{n^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

Sugerencia: Notar que, en ambos casos, a_n consta de una suma de $n+1$ términos.

14. Sea $a_n = \frac{4n-10}{n+1}$.

- a) Encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ se cumpla que $3 < a_n < 5$.
- b) Encontrar $\max\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\min\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.

15. Probar que toda sucesión convergente es acotada.
16. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto acotado y sea $s = \sup(A)$. Probar que existe una sucesión a_n contenida en A que converge a s . Probar el resultado análogo para el ínfimo de A .
17. Sea a_n una sucesión monótona acotada. Probar que a_n es convergente.
18. (Aproximación de la raíz cuadrada de $b > 0$) Considerar la sucesión definida de la siguiente manera:

$$a_1 = a > 0 \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{b}{a_n} \right)$$

- a) Probar que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que a_n es decreciente todo $n \geq n_0$.
- b) Probar que a_n está acotada inferiormente (ver ejercicio 6).
- c) Probar que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{b}$.

Métricas y topología en \mathbb{R}^n

19. Resolver las siguientes ecuaciones e inecuaciones en \mathbb{R}^2 . Representar las soluciones en el plano.

- a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 \leq 2\}$ b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - y| > 2\}$
 c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$ d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$
 e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| + |y| < 3\}$ f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - 2| + |y + 1| \geq 1\}$
 g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|; |y|\} = 1\}$ h) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \max\{|x|; |y|\} < 1\}$

20. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, se define $\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$ y $\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, \dots, n\}$

a) Mostrar que si $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que

- 1) $|x_i| \leq \|x\|_2$, si $i = 1, \dots, n$;
- 2) $\|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$;
- 3) $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$. Describir geoméricamente esta doble desigualdad.

b) Usando lo hecho, concluir que:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \sqrt{n} \|x\|_\infty < r\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < r\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty < r\}.$$

c) Sea $A \subset \mathbb{R}^n$. Mostrar la equivalencia de los siguientes dos enunciados:

- 1) A es abierto;
- 2) cualquiera sea $y \in A$, existe $r > 0$ tal que

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \|x - y\|_\infty < r\} \subseteq A.$$

21. a) Mostrar que los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 son abiertos

- 1) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 7\}$;
- 2) $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y > 1\}$;
- 3) $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \vee y \neq 0\}$.

b) Dar un ejemplo de un conjunto en \mathbb{R}^3 que no sea ni abierto ni cerrado.

22. Para cada uno de los siguientes conjuntos $A \subset \mathbb{R}^3$, calcular ∂A , \bar{A} , $\bar{A} \setminus A$ y $A \setminus \partial A$:

- a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$;
- b) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \wedge z < 2\}$;
- c) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \wedge x^2 + y^2 + (z + 1)^2 < 1\}$;
- d) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 < 1 \wedge x^2 + y^2 > 1/2\}$.

23. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos de \mathbb{R}^2 son cerrados y acotados:

- a) $K_1 = B_1(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$;
- b) $K_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;
- c) $K_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$;
- d) $K_4 = \{(0, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$;
- e) $K_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1 \wedge y = 0\}$.

24. En cada uno de los siguientes casos, encuentre una sucesión de puntos de A que no posea ninguna subsucesión convergente a un punto de A :

- a) $A = B_1(0) \subset \mathbb{R}^2$;
- b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0 \wedge y > 0\}$.