

PRÁCTICA 3

Diferenciación

PRIMERA PARTE

1. Sea f una función que verifica $0 \leq f(x) \leq x^2$ para x en un intervalo abierto alrededor del origen. Probar que existe $f'(0)$ y calcular la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en el punto $(0, f(0))$.

2. Sea f una función derivable en $x = a$. Probar que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - f'(a)(x - a)}{x - a} = 0.$$

3. Supongamos que f es una función continua en $x = a$ y que satisface

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - \alpha - \beta(x - a)}{x - a} = 0.$$

Probar que f es derivable en $x = a$ y que $y = \alpha + \beta(x - a)$ es la ecuación de la recta tangente al gráfico de f en $(a, f(a))$.

4. Consideremos la función $f(x) = x^2$ y la recta de ecuación $y = 9 + 4(x - 3)$. Demostrar que $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) - (9 + 4(x - 3)) = 0$ pero que

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - (9 + 4(x - 3))}{x - 3} \neq 0.$$

Meditar sobre la frase "la recta tangente es la mejor aproximación lineal".

5. Para cada una de las siguientes funciones f y g , calcular la derivada en $t = 0$ de la función compuesta $f \circ g$.

- a) $f(x, y) = x^2 + y^2$ $g(t) = t(1, 0) + (1, 2)$, $g(t) = t(0, 1) + (1, 2)$
 b) $f(x, y) = 2xy - 3x^2 + y - 5$ $g(t) = t(1, 1) + (2, 3)$, $g(t) = t(1, 2) + (0, 1)$
 c) $f(x, y, z) = e^z(xy + z^2)$ $g(t) = t(0, 1, 0) + (1, 1, 2)$
 d) $f(x, y) = (x + 1) \operatorname{sen} y - 2$ $g(t) = t(1, 0) + (x_0, y_0)$, $g(t) = t(0, 1) + (x_0, y_0)$
 e) $f(x, y) = \|(x, y)\|$ $g(t) = t(a, b)$

6. a) Sea $f(x, y) = \sqrt{xy + \frac{x}{y}}$ y $v = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial y}(2, 1)$ y $\frac{\partial f}{\partial v}(2, 1)$.

- b) Calcular $\frac{\partial f}{\partial z}(1, 1, 1)$ para $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + z^2} + \ln(y)$

- c) Sea $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$. Calcular $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ para todo vector unitario v .

7. Calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll} a) f(x, y) = x^4 + 2xy + y^3x - 1 & b) f(x, y, z) = ye^x + z \\ c) f(x, y) = x^2 \sin^2(y) & d) f(x, y) = \sin x \\ e) f(x, y, z) = z(\cos(xy) + \ln(x^2 + y^2 + 1)) & f) f(x, y) = xe^{x^2+y^2} \\ g) f(x, y) = \arctan \frac{y}{x} & \end{array}$$

8. Probar que la función $f(x, y) = |x| + |y|$ es continua pero no admite derivadas parciales en el origen.

9. Consideremos la siguiente función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Probar que las únicas direcciones $v \in \mathbb{R}^2$ para las que existe la derivada direccional f_v en el origen son $v = (1, 0)$ y $v = (0, 1)$. Probar, además, que la función no es continua en el origen.

10. Consideremos la siguiente función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y}{x^6+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Probar que f admite derivadas direccionales en el origen para todo vector unitario $v \in \mathbb{R}^2$. Sin embargo, f tampoco es continua en el origen.

11. Sea $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$.

a) Usando la definición de derivada direccional, mostrar que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

y que $\pm e_1, \pm e_2$ son las únicas direcciones para las cuales existe la derivada direccional en el origen.

b) Mostrar que f es continua en $(0, 0)$.

12. Graficar las curvas definidas por $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

$$\begin{array}{ll} a) \sigma : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3, \sigma(t) = (\cos(t), \sin(t), t) & b) \sigma : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3, \sigma(t) = (1, 1, t) \\ c) \sigma : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^3, \sigma(t) = (1, 1, t^2) & d) \sigma : [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}^3, \sigma(t) = (1, t^2, t) \\ e) \sigma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \sigma(t) = t(1, 1, 0) + (1-t)(1, 0, 5). & \end{array}$$

13. Graficar las curvas definidas por $\sigma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\sigma(t) = (x(t), y(t))$.

$$\begin{array}{l} a) \sigma : [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \sigma(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)). \\ b) \sigma : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2, \sigma(t) = (\cos(2t), \sin(2t)). \end{array}$$

14. Calcular la derivada de σ en $t = t_0$. Encontrar la ecuación de las rectas tangentes a la curva imagen de σ en $\sigma(t_0)$.

$$\begin{array}{l} a) \sigma(t) = (6t, 3t^2, t^3), \quad t_0 = 0 \\ b) \sigma(t) = (\cos^2(t), 3t - t^3, t), \quad t_0 = 0 \\ c) \sigma(t) = (\sin(3t), \cos(3t), 2t), \quad t_0 = 1 \end{array}$$

15. Encontrar curvas σ que representen los siguientes conjuntos o trayectorias.

a) $\{(x, y)/y = e^x\}$

$$b) \{(x, y)/4x^2 + y^2 = 1\}$$

$$c) \{(x, y, z)/x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, z = x^2 + y^2, z \neq 0\}$$

16. Sea $f(x, y) = x^2 + y^2$ y las siguientes rectas de \mathbb{R}^2 definidas por

$$g_1(t) = t(1, 0) + (2, 3), \quad g_2(t) = t(0, 1) + (2, 3), \quad g_3(t) = t(1, 1) + (2, 3).$$

a) Considerar la restricción de f a la imagen de cada una de las g_i . Mostrar que el gráfico de esta restricción es una curva de \mathbb{R}^3 . Dar una parametrización $\sigma_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\sigma_i(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de dicha curva.

b) Para cada $i = 1, 2, 3$, encontrar t_0 tal que $\sigma_i(t_0) = (2, 3, f(2, 3))$. Calcular el vector tangente a la imagen de σ_i en $t = t_0$.

c) Para cada $i = 1, 2, 3$, determinar un vector unitario $v = (v_1, v_2)$ de manera que la recta de ecuación paramétrica $\mathbb{L} : t(v_1, v_2, f_v(2, 3)) + \sigma_i(t_0)$ resulte tangente a la curva σ_i en $t = t_0$.

17. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, $v = (a, b)$ y $\mathbb{L} : tv + (x_0, y_0)$. Supongamos además que existe $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$. Probar que una ecuación paramétrica de la recta tangente a la curva definida por

$$\sigma(t) = (ta + x_0, tb + y_0, f(ta + x_0, tb + y_0))$$

en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ viene dada por

$$\mathbb{L} : t(a, b, f_v(x_0, y_0)) + (x_0, y_0, f(x_0, y_0)).$$

18. Sea $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$

a) Encontrar ecuaciones paramétricas de las rectas tangentes a las siguientes curvas en $t_0 = 0$:

$$\sigma_1(t) = (t + 1, 3, f(t + 1, 3)) \quad \text{y} \quad \sigma_2(t) = (t + 1, t + 3, f(t + 1, t + 3)).$$

b) Encontrar la ecuación de un plano $z = T(x, y)$ que contenga ambas rectas y mostrar que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} \frac{f(x, y) - z}{\|(x, y) - (1, 3)\|} = 0.$$

$$19. \text{ Sea } f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Probar que en el origen f es continua, admite todas las derivadas direccionales, pero que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y) - (\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)y + f(0, 0))}{\|(x, y)\|} \neq 0.$$

20. Sea f diferenciable en $(1, 2)$ tal que $f(1, 2) = 3$. Se sabe que $f_{v_1}(1, 2) = 3$, $f_{v_2}(1, 2) = 4$ con $v_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ y $v_2 = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$.

a) Encontrar la ecuación del plano tangente al gráfico de f en $(1, 2, f(1, 2))$.

b) Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$.

21. Sea $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable en $a \in \mathbb{R}^n$. Probar que para cada vector unitario $v \in \mathbb{R}^n$ existe la derivada direccional $f_v(a)$ y que $f_v(a)$ es igual a $\nabla f(a) \cdot v$, donde \cdot denota el producto escalar entre vectores de \mathbb{R}^n .

22. Estudiar la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de las siguientes funciones en el origen:

$$a) f(x, y, z) = \sqrt{|xyz|}$$

$$b) f(x, y) = \begin{cases} x \sin\left(4 \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$c) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$d) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$e) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y} \sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

23. Estudiar la existencia de plano tangente al gráfico de las siguientes funciones en los puntos indicados. Si existe, escribir la ecuación.

$$a) f(x, y) = xy + 1 - \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) \text{ en } (1, 5) \text{ y en } (2, 2).$$

$$b) f(x, y) = x^{1/4}y^{1/4} \text{ en } (0, 0) \text{ y en } (16, 1).$$

$$c) f(x, y) = \frac{x}{y} \text{ en } (x_0, y_0) \text{ con } y_0 \neq 0.$$

$$d) f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ en } (0, 0) \text{ y en } (1, 0).$$

$$e) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \text{ en } (0, 0) \text{ y en } (-1, 1).$$

$$f) f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^3 + x^2(y^2 - 6y + 7) + (y - 1)^2(6x + 12 - 8y)}{x^2 + 2(y - 1)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 1) \\ 2 & \text{si } (x, y) = (0, 1) \end{cases} \text{ en } (0, 1).$$

24. Usando la expresión

$$z = f(x_0, y_0) + \nabla f(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)$$

para una función f adecuada, aproxime $(0, 99e^{0,2})^8$.

25. Calcular el gradiente de f para

$$a) f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} + z^2, \quad b) f(x, y, z) = xy + xz + yz, \quad c) f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$$

26. Encuentre la dirección en que la función $z = x^2 + xy$ crece más rápidamente en el punto $(1, 1)$. ¿Cuál es la magnitud $\|\nabla z\|$ en esta dirección? Interpretar geoméricamente esta magnitud.

27. Supongamos que la función $h(x, y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ representa la altura de una montaña en la posición (x, y) . Estamos parados en un punto del espacio cuyas coordenadas respecto del plano xy son iguales a $(1, 0)$ ¿En qué dirección deberíamos caminar para escalar más rápido?

28. a) Mostrar que si $\nabla f(x_0) \neq 0$ entonces $-\nabla f(x_0)$ apunta en la dirección a lo largo de la cual f decrece más rápidamente.

b) Una distribución de temperaturas en el plano está dada por la función

$$f(x, y) = 10 + 6 \cos(x) \cos(y) + 4 \cos(3y)$$

En el punto $(\pi/3, \pi/3)$ encontrar las direcciones de más rápido crecimiento y más rápido decrecimiento.

29. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por $T(x, y) = (x + y, x - y, 2x + 3y)$

- Verificar que T es una transformación lineal y calcular su matriz asociada (en las bases canónicas de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3).
- Calcular la matriz de la diferencial $DT(a)$ para $a \in \mathbb{R}^2$. Verificar que es la misma matriz que la hallada en 1).
- A continuación consideremos una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$.

1) Supongamos que T verifica

$$\lim_{v \rightarrow \vec{0}} \frac{\|Tv\|}{\|v\|} = 0,$$

donde $\vec{0}$ denota el vector nulo de \mathbb{R}^m . Probar entonces que T es la transformación lineal nula, es decir, para cada $w \in \mathbb{R}^n$ tenemos que $T(w) = \vec{0}$.

2) Asumiendo que T es diferenciable, deducir que para cada $a \in \mathbb{R}^n$ la diferencial $DT(a)$ es igual a T .

30. Para cada una de las siguientes funciones calcular $DF(a)$ para a en el dominio de F .

- $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (x, y)$
- $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x, y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y)$
- $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (x + e^z + y, yx^2)$
- $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \|x\|^2$