Lista de temas para el examen final

El final puede incluir uno o más teoremas de esta lista, y puede incluir ejercicios.

Límite y continuidad

1. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ acotado superiormente y sea $s = \sup(A)$. Probar que existe una sucesión $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} = s$.
2. Probar que toda sucesión de números reales monótona y acotada es convergente.
3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continua en $P \in \mathbb{R}^2$. Si $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $\mathbb{R}^2$ tal que $\lim\limits_{k\to\infty} P_k = P$, probar que $\lim\limits_{k\to\infty} f(P_k) = f(P)$.
4. Sea $K \subset \mathbb{R}^2$ compacto y sea $f : K \to \mathbb{R}$ continua. Probar que f es acotada y alcanza su mínimo y su máximo valor.
5. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Probar que f es uniformemente continua.

Diferenciabilidad

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $P \in \mathbb{R}^2$. Probar que f es continua en P.
2. Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con derivadas parciales continuas en el abierto U. Probar que f es diferenciable en U.
3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $P \in \mathbb{R}^2$ y $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|v\| = 1$. Probar que existe $f_v(P)$ y es igual a $\nabla f(P).v$
4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $P \in \mathbb{R}^2$, $\nabla f(P) \neq 0$. Probar que la dirección de máximo crecimiento está dada por $\nabla f(P)$.
5. Teorema del valor medio para funciones diferenciables.
6. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en $P \in \mathbb{R}^2$ y P un extremo de f. Probar que $\nabla f(P) = 0$
7. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de clase C^3 y P un punto crítico de f. Probar que
   - si el hessiano de f en P es definido positivo, entonces P es un mínimo relativo estricto de f.
   - si el hessiano de f en P es definido negativo, entonces P es un máximo relativo estricto de f.
   - si el hessiano de f en P es indefinido (o sea, no es ni definido positivo, ni definido negativo), entonces P es un punto silla de f.
8. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = 0\}$, donde g es diferenciable y $P \in S$. Si P es extremo de f restringido a S y $\nabla g(P) \neq 0$, probar que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\nabla f(P) = \lambda \nabla g(P)$.

Integración

1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Probar que f es integrable sobre $[a, b]$.

2. Teorema fundamental del cálculo: si f es continua en $[a, b]$, $x \in (a, b)$,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x).$$

3. Teorema del valor medio para integrales dobles: Sea $P \in \mathbb{R}^2$. Si f es continua en $\overline{B(P, r)}$, entonces existe $Q \in \overline{B(P, r)}$ tal que,

$$\frac{1}{\text{Área}(B(P, r))} \iint_{B(P,r)} f(x, y)dA = f(Q).$$